$\mathbb{D}$ דיסק היחידה, M מרומורפית, H הולומורפית, Z_f מספר האפסים של f, P_f מספר הקטבים של f, D^* דיסק מנוקב

$G \subset \mathbb{C}$ תחום סבבה: תחום חסום, שפה שהיא איחוד סופי של מסילות רציפות וגזירות למקוטעין.

עבור G תחום סבבה, f נקראית G-סבבה אם היא הולומורפית ב-G ורציפה ב-$\bar{G}$.

שימו לב: אסור לצטט טענות מש"ב ללא הוכחה. מומלץ לוודא אם מותר להשתמש בטענות בזמן המבחן.

0.1 מרוכבים

$$\mathrm{Arg}(x+iy) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x \geq 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & x < 0, y < 0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & x < 0, y \geq 0 \end{cases}$$

זהות לגראנז' $\left|\sum_{k=1}^n a_k b_k\right|^2 = \left(\sum_{k=1}^n |b_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^n |a_k|^2\right) - \sum_{1\leq j<k\leq n} \left|a_j\bar{b_k} - a_k\bar{b_j}\right|^2$

א"ש קושי שוורץ $\left|\sum_{j=1}^n a_j\bar{b_j}\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n |a_k|^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^n |b_k|^2}$

א"ש משולש: $|x+y| \leq |x| + |y|$, $||x| - |y|| \leq |x-y|$

F פונקציה רב ערכית. $f : G \to \mathbb{C}$ נקראת ענף של F אם f גזירה ומקיימת $\forall z\, f(z) \in F(z)$

$z^w = e^{w \log z}$

הזווית בין γ_1 ל-γ_2 היא $\arg(\gamma_1') - \arg(\gamma_2') = \arg(\gamma_1' \cdot \overline{\gamma_2'})$

$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$,

$\sinh z = i \cdot \cosh z = \cos\left(\frac{z}{i}\right) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$

$\cosh(iz) + \sinh(iz) = e^z$, $\sin\left(\frac{z}{i}\right) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$

אם יש אפס מספר m ב-z_0 (נגזרות עד m מתאפסות ו-$m+1$ לא) אז קיימת g הולו', $g(z_0) \neq 0$ ו-$f(z) = (z-z_0)^m g(z)$ בכל התחום.

0.2 גזירה

משוואות קושי רימן: $G \subset \mathbb{C}$ תחום, $z_0 \in G$ אז $f : G \to \mathbb{C}$ גזירה בנקודה $z_0 \in D$ אם היא דיפרנציאבילית בה ובנוסף מתקיימות משוואות קושי רימן (נסמן $f = u + iv$) $\begin{matrix} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{matrix}$

אם f גזירה $f' = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} = -i\frac{\partial f}{\partial y}$

קושי רימן בקורדינטות פולריות $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ אז $\begin{matrix} u_r = \frac{1}{r}v_\theta \\ v_r = -\frac{1}{r}u_\theta \end{matrix}$

$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$, $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$

ו-f הולו' אמ"מ $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ מתאפס.

$\Delta f := f_{xx} + f_{yy} = 4\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}}$ (היה בש"ב; $\overline{\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ גם מהש"ב). העתקה היא הרמונית אמ"מ $\Delta = 0$

אם $f = u + iv$ הולו' אז u, v הרמוניות. כמו כן, אם נתון למשל u הרמונית, אפשר למצוא v צמוד הרמוני שלה לפי משוואות קושי רימן כך ש-$u+iv$ תהיה הולו' (עד כדי תנאים על התחום)

אם f גזירה ב-z_0 ו-$f'(z_0) \neq 0$ אז f קונפורמית ב-z_0.

עבור f הולו', $f(z_0) = 0$ אז z_0 אפס מריבוי n ב-f אם $f(z_0) = f'(z_0) = .. = f^{(n-1)}(z_0)$ ו-$f^{(n)}(z_0) \neq 0$

לפונקציה הולו' שאינה פונקצית האפס, יש אפסים מריבוי סופי בלבד

f רציפה ודיפרנציאבילית אז f קונפורמית אמ"מ f הולומורפית וגם $f' \neq 0$

0.3 ענפים

בתחום $G \subset \mathbb{C}$ עבור $f \in H(G)$ ענף של $\log(f)$ הוא פונקציה רציפה $u : G \to \mathbb{C}$ כך ש-$e^{u(z)} \equiv f(z)$

אם u_1, u_2 שני ענפים של $\log f$ אז $u_1 - u_2 = const$

$f : G \to \mathbb{C}$ הולו', $z_0 \in G$ ונניח $f(z_0) \neq 0$. אז יש $\delta > 0$ כך שבדיסק $D(z_0, \delta)$ יש ענף של $\log f$

אם u ענף של $\log(f)$, אז u הולו' ו-$u' = \frac{f'}{f}$; $\int_\gamma (\log f)' = \int_\gamma \frac{f'}{f} = 0$

0.4 העתקות מביוס

$h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. אם $c \neq 0$ אז $h(\infty) = \frac{a}{c}$, $h\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$ h. אם $c = 0$, $h(\infty) = \infty$.

העתקת מביוס מעבירה מעגל מוכלל למעגל מוכלל.

הרכבה של העתקות מביוס היא העתקת מביוס של כפל המטריצות המייצגות. אותו דבר להופכי.

להעתקות מביוס שאינן הזהות יש לכל היותר 2 נקודות שבת.

קיימת ויחידה העתקת מביוס שמעבירה שלוש נקודות שונות זו מזו לשלוש נקודות שונות זו מזו, והיא נתונה ע"י $(z_1, z_2, z_3, z) = (w_1, w_2, w_3, f(z))$ כש-$(a,b,c,d) = \frac{\left(\frac{a-c}{a-d}\right)}{\left(\frac{b-c}{b-d}\right)}$

העתקת מביוס קונפורמית ובי-הולומורפית (ההופכית גם הולו')

$(z_1, z_2, z_3, z^*) = \overline{(z_1, z_2, z_3, z)}$ נקודה סימטרית ל-z^*:

0.5 סדרות וטורים

התכנסות במ"ש מקומית: לכל נקודה יש סביבה שבה סדרת הפונקציות מתכנסת במ"ש.

אם $f_n \to f$ במ"ש מקומית ו-f_n הולו', אז f הולו' ולכל k $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ במ"ש מקומית

קריטריון ויירשטראס: אם קיים $M_n \in \mathbb{R}$, $\sum M_n < \infty$ ו-$|f_n| \leq M_n$ אז הטור $\sum_{n=1}^\infty f_n$ מתכנס במ"ש.

עבור $\sum a_n(z-z_0)^n$ טור חזקות, רדיוס ההתכנסות נתון לפי קושי הדמרד: $\frac{1}{R} = \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}}$

לכל טור חזקות יש פונקציה קדומה (והוא גזיר ∞ פעמים)

$$\frac{1}{z-a} = \begin{cases} -\sum \frac{z^n}{a^{n+1}} & |z| < |a| \\ \sum \frac{a^n}{z^{n+1}} & |a| < |z| \end{cases}$$

רדיוס התכנסות לטור לורן: $R_- = \frac{1}{R_+} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$, $\limsup \sqrt[n]{|a_{-n}|}$

0.6 עקומות ואינטגרלים

$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt$,

$length(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|dt$

ניוטון לייבניץ: $\int_\gamma f' = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$

$$\int_{z_0 + Re^{it}} (z-z_0)^n dz = \begin{cases} 0 & -1 \neq n \in \mathbb{Z} \\ 2\pi i & n = -1 \end{cases}$$

$\left|\int_\gamma f\right| \leq \int_\gamma |f|$, $\left|\int_\gamma f\right| \leq \sup_\gamma f \cdot length(\gamma)$

γ גזירה ברציפות למקוטעין, $f_n \xrightarrow{u} f$ במ"ש על $\gamma([a,b])$ ורציפות שם. אז $\int_\gamma f_n \to \int_\gamma f$

1 משפטים חשובים

משפט קושי: עבור פונקציה הולומורפית בתחום G ורציפה ב-$\bar{G}$, ששפתו מהצורה $\partial G = \gamma_1 \cup \gamma_t \cup$ ..(איחוד סופי וזר עד כדי קצוות), ו-γ_i מסילה גזירה ברציפות, מתקיים $\int_{\partial G} f = 0$. האוריינטציה נגד כיוון השעון, או "רגל ימין מחוץ לתחום", "התחום משמאל" וכו'.

נוסחאת קושי: $f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial G} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz$ (עבור $a \in G$; עבור $a \notin G$ האינטגרל מתאפס)

משפט הערך הממוצע: $f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + R \cdot e^{i\theta})$

משפט ליוביל: $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ שלמה וחסומה, אז f קבועה.

המשפט היסודי של האלגברה: לכל פולינום לא קבוע יש שורש. (אם אין שורש קל לראות שהפונקציה $\frac{1}{p}$ הולו' וחסומה ומשתמשים במשפט ליוביל)

אין פונקציה הולו' לא קבועה מ-$\mathbb{C} \to \mathbb{D}$

ניתן לכתוב פונקציה הולומורפית כטור חזקות

לכל f הולו' ב-$R_- < |z| < R_+$ קיימים $\{a_n\}$ כך ש-$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n$ ויש התכנסות נורמלית בטבעת.

$G \subset \mathbb{C}$ תחום קמור, $f : G \to \mathbb{C}$ הולו', אז ל-f יש קדומה בתחום: $F(z) = \int_{[z_0,z]} f(w)dw$

משפט $Morrera$: אם $G \subset \mathbb{C}$ תחום, $f : G \to \mathbb{C}$ רציפה ולכל משולש (מלא) $T \subset G$ מתקיים $\int_T f = 0$, אז f הולו'

משפט השארית: $G \subset \mathbb{C}$ תחום סבבה, $a_1, ..., a_n \in G$. f הולו' ב-$G\backslash\{a_1, ..., a_n\}$ ורציפה ב-$\bar{G}\backslash\{a_1, .., a_n\}$. אז: $\int_{\partial G} f = 2\pi i \sum_{k=1}^n \mathrm{res}_{a_k} f$

עקרון הארגומנט: יהי G תחום סבבה, $f \in M(G)$ ורציפה $\bar{G}\backslash\{\text{poles}\}$ נניח גם ש-$f(z) \neq 0$ על ∂G אז $\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G} \frac{f'}{f} = Z_f(G) - P_f(G)$ (מספר הליפוף). ($m = \pm\mathrm{res}_a\left(\frac{f'}{f}\right) + m$ - סדר האפס, $-m$ סדר הקוטב)

משפט רושה: G תחום סבבה, f, g G-סבבה. אם מתקיים: $|f-g| < |f|$ על ∂G אז $Z_f = Z_g$. (אפשר גם אם $|g| < |f|$ על ∂G אז $Z_{f+g} = Z_f$)

פיצול אפסים מרובים: $f \in H(G)$, $z_0 \in G$, $w_0 \in \mathbb{C}$; לפונקציה $z \mapsto f(z) - w_0$ יש אפס מסדר m ב-z_0. קיים $\epsilon_0 > 0$, לכל $0 < \epsilon < \epsilon_0$, קיים $\delta > 0$ כך שלכל $w \in D^*(w_0, \delta)$ למשוואה $f(z) = w$ יש בדיוק m פתרונות ב-$D^*(z_0, \epsilon)$.

משפט ההעתקה ההפוכה: G תחום, f הולו' וחח"ע אז $f(G) \to G : f^{-1}$ הולו' וגם $(f^{-1})'(w) = \frac{1}{f'(f^{-1}(w))}$

משפט היחידות: $f, g \in Hol(G)$ מתלכדות על קבוצה בעלת נקודת הצטברות, אז $g \equiv f$.

אם f הולו' קבועה בקבוצה פתוחה אז היא קבועה בכל התחום (מסקנה ממשפט היחידות).

עקרון המקסימום: G תחום סבבה f G-סבבה, אז $\max_{z\in\bar{G}} |f(z)| = \max_{z\in\partial G} |f(z)|$; ואם יש נקודה פנימית שבה מתקבל המקסימום, אז f קבועה. (אם f לא מתאפסת, אז יש גם את עיקרון המינימום; הטיעון תקף גם על $\mathrm{Re}f, \mathrm{Im}f$ מהרמוניות)

משפט ההעתקה הפתוחה: אם f הולו' בתחום G ולא קבועה, אז $f(G)$ קבוצה פתוחה. בנוסף, אם f חח"ע אז $f'(z) \neq 0$ ואם $f'(z_0) \neq 0$ אז יש סביבה של z_0 שבה f חח"ע (מפיצול אפסים).

הלמה של שוורץ: $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ הולו', $f(0) = 0$ אז $|f(z)| \leq |z|$ $\forall z \in \mathbb{D}$, ו-$|f'(0)| \leq 1$. אם קיים z_0 כך ש-$|f(z_0)| = |z_0|$ אז $f(z) = c \cdot z$ כש-$|c| = 1$.

משפט $Hurwitz$: יהי $G \subset \mathbb{C}$ תחום. במ"ש $f_1, f_2, ... \in Hol(G)$ כך ש־$f_n \to f$ מקומית (התכנסות במ"ש על כל תת קבוצה קומפקטית). אם $\forall n, z \in G\, f_n(z) \neq 0$ אז f אינה מתאפסת באף נקודה ב־G, או ש־$f \equiv 0$.

עבור סדרה כזאת של פונקציות אם הן חח"ע אז הפונקציה הגבולית חח"ע או קבועה.

גבול של העתקות קונפורמיות הוא העתקה קונפורמית, או פונקציה קבועה.

אוטומורפיזמים של מעגל: תהא $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ הולו', חח"ע ועל; אז יש $|a| < 1$, $0 \leq \theta < 2\pi$ כך ש־$f(z) = e^{i\theta} \cdot \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$

טופולוגיה אם γ עקומה ו־f רציפה על γ ולא מתאפסת אז יש ψ רציפה כך ש־$e^{\psi(t)} = f(\gamma(t))$

$$\Delta(\log f, \gamma) := \psi(b) - \psi(a)$$

ואז

$$\Delta(\arg f, \gamma) := \mathrm{Im}\,(\psi(b) - \psi(a))$$

נגדיר $\mathrm{ind}_\gamma(z_0) = \frac{\Delta(\log(z-z_0),\gamma)}{2\pi i} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z-z_0}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z_0}dt$ (מספר הליפוף, כמה פעמים מקיפים את z_0), ב־$\mathbb{Z}$ עבור עקומה סגורה.

אם f הולו' שמוגדרת בסביבת $image(\gamma)$ ולא מתאפסת ב־γ אז $\Delta(\log f, \gamma) = \int_\gamma \frac{f'}{f}$

לכל z "מחוץ ל־γ" (נניח γ מוכלת בכדור ו־z מחוץ לו) אז $\mathrm{ind}_\gamma z = 0$

תזכורת: הומוטופיה - מעבר רציף בין עקומות.

גרסה הומולוגית של משפט קושי: $G \subset \mathbb{C}$ תחום (לא בהכרח חסום!), $f \in H(G)$. $\gamma \subset G$ רציפה, סגורה, גזירה ברציפות למקוטעין כך ש־$\int_\gamma f = 0$ אז $\forall z_0 \notin G,\ \mathrm{ind}_\gamma z_0 = 0$

ממשפט קושי: G תחום סבבה, f G־סבבה אז $\int_\gamma f = \int_{\partial G} f(z) \cdot \mathrm{ind}_\gamma(z)dz$

G תחום, $f \in H(G)$, $\gamma_1, \gamma_2 \subset G$ גזירות ברציפות למקוטעין. אם $\forall z \in \mathbb{C}\backslash G,\ \mathrm{ind}_{\gamma_1}(z) = \mathrm{ind}_{\gamma_2}(z)$ אז $\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$

גרסה הומולוגית של נוסחת קושי: f G־סבבה, $\gamma \subset G$ סגורה גזירה ברציפות למקוטעין ו־$\forall z \notin G,\ \mathrm{ind}_\gamma(z) = 0$, אז $\forall z_0 \notin G,\ \mathrm{ind}_\gamma(z_0) \cdot f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}dz$

גרסה הומוטופית של משפט קושי: אם G תחום סבבה ו־f G־סבבה, ו־γ הומוטופית לקבועה (נקודה) אז $\int_\gamma f = 0$. בפרט, משפט קושי מתקיים ל־G פשוט קשר. באופן כללי יותר, אם γ_1 הומוטופית ל־γ_2 אז $\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f$.

אם γ סגורה אז $z \mapsto \mathrm{ind}_\gamma(z)$ קבועה מקומית ב־$\mathbb{C}\backslash\gamma$.

אם כל עקומה ב־G מקיימת $\forall z_0 \notin G,\ \mathrm{ind}_\gamma z_0 = 0$ אז G פשוט קשר

כל G חסום עם $\mathbb{C}\backslash G$ קשיר הוא פשוט קשר

G פשוט קשר, $\gamma \subset G$ סגורה, גזירה ברציפות למקוטעין, $f \in H(G)$ אז $\int_\gamma f = 0$

$G \subset \mathbb{C}$ פשוט קשר, $f \in H(G)$. אז ל־f יש קדומה: קיימת $F \in H(G)$ כך ש־$F' = f$.

$G \subset \mathbb{C}$ פשוט קשר, $f \in H(G)$, $\forall z \in G$ $f(z) \neq 0$ אז יש log ושורש של הפונקציה (בכל G).

טענות נוספות אם $f \in H(\hat{\mathbb{C}})$ אז f קבועה (סליקה באינסוף)

f פולינום אמ"מ f שלמה עם קוטב ב־∞

$f \in M(\hat{\mathbb{C}})$ אמ"מ f רציונלית (ש"ב)

$f \in H(K)$ כש־K קומפקט קמור היא ליפשיץ (ש"ב - $|f'| \leq M$ ואז $|f(z_1) - f(z_0)| = \left|\int_{[z_0,z_1]} f'\right| \leq M\,|z_1 - z_0|$ לפי החסם הטריוויאלי)

שלמה לא קבועה מקבלת כל ערך מוחלט חיובי (צריך להוכיח)

1.1 חישוב שארית

שארית: מקדם a_{-1} בטור לורן. נוסחה כללית: $a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$ היא שפה פשוטה של הסביבה המבודדת של z_0.

אם יש קוטב פשוט: $res_{z_0} f = \lim_{z\to z_0}(z - z_0)\cdot f(z)$

אם f, g הולו', $f(z_0) \neq 0$, $g(z_0) = 0$, $g'(z_0) \neq 0$ אז: $res_{z_0}\frac{f}{g} = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}$

אם f הולו' ב־z_0: $res_{z_0}\frac{f(z)}{(z-a)^m} = \frac{f^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$

השארית ב־∞: $res_\infty f = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} f(z)dz$ עבור r מספיק גדול (שיכיל את כל הנקודות הסינגולריות האחרות).

$\mathrm{res}_\infty f = -\mathrm{res}_0\left(f\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{1}{z^2}\right)$ (כי $-\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r} f(z)dz = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=1/r} f\left(\frac{1}{w}\right)\cdot\frac{1}{w^2}dz$)

עבור $f \in M(\hat{\mathbb{C}})$ אז $\sum \mathrm{res}_{a_k} f = 0$ עבור a_k הקטבים של f.

1.2 סינגולריות

סליקה: מקדמים שליליים בטור לורן מתאפסים אם"ם הפונקציה חסומה בסביבת הנקודה אמ"מ אם"ם יש השלמה הולומורפית בנקודה אמ"מ $\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = 0$

קוטב: מספר סופי של מקדמים שליליים בטור לורן לא מתאפסים אם"ם $\lim_{z\to a}|f(z)| = \infty$ אם"ם יש φ הולו' לא מתאפסת בנקודה כך ש־$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^n}$ (n סדר הקוטב = החזקה השלילית הכי גדולה בטור לורן).

עיקרית: מספר אינסופי של מקדמים שליליים בטור לורן לא מתאפסים אם"ם התמונה של כל סביבה צפופה (אם"ם יש לפחות 2 גבולות שונים בנקודה).

$Casorati–Weierstrass$: ל־f נק' סינגולרית מבודדת ב־z_0. אז הסינגולריות עיקרית אמ"מ לכל $\epsilon > 0$, $f(D(z_0,\epsilon)\backslash\{z_0\})$ צפופה ב־$\mathbb{C}$ (הסגור שלה הוא כל $\mathbb{C}$).

משפט $Picard$: אם ל־f יש סינגולריות עיקרית ב־z_0, אז לכל ϵ מתקיים $|\mathbb{C}\backslash(f(D(z_0,\epsilon))\backslash\{z_0\})| \leq 1$ (לא הוכח)

באינסוף: ל־f יש * באינסוף אם ל־$f\left(\frac{1}{z}\right)$ יש * ב־0 (כש־* זה סליקה / קוטב / עיקרית).

2 העתקות חשובות

$f(z) = \sqrt{\frac{z+1}{z-1}}$ אין ענף ב־$\mathbb{C}\backslash\{-1,1\}$ אבל יש ב־$\mathbb{C}\backslash[-1,1]$

$\varphi_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$ מעבירה את a ל־0, ועבור $a \in \mathbb{D}$ $\varphi_a(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$ (שפה עוברת לשפה). $|\varphi_a'(a)| = \frac{1}{1-|a|^2}$, $|\varphi_a'(0)| = 1 - |a|^2$.

$\sqrt{z}$ מחלקת ב־2 את הזווית. לוקחים ענף באופן שיתאים לאופן בו רוצים לחלק אותה.

סינוס היפרבולי: $\frac{e^z - e^{-z}}{2}$ מעביר את $\left\{\mathrm{Re}z > 0, \mathrm{Im}z \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right\}$ לחצי מישור ימני.

$h(z) = \frac{z+z^{-1}}{2}$ מעבירה את $\{\mathrm{Re}z > 0,\ |z| > 1\}$ לחצי מישור ימני בלי $[0,1]$.

$\varphi(z) = \frac{z+1}{-z+1}$ מעביר את דיסק יחידה לחצי מישור ימני.

$\varphi(z) = \frac{z-i}{z+i}$ לוקח את הרבע מישור הימני עליון, ומעביר אותו לחצי דיסק יחידה עליון (חצי מישור ימני לחצי מישור עליון ואז למעגל היחידה).

דוגמאות לסינגולריות עיקרית: $e^{\frac{1}{z}}, e^{\frac{1}{z^2}}$

3 שיטות וטריקים

קיום אפס: מסתכלים על $\frac{1}{f}$ וסותרים הולו' (אפשר עיקרון המקסימום); משפט רושה

פיתוח לטור לורן: את החלקים ההולו' לפי טיילור, את החלקים הקטביים לפי סכום טור הנדסי.

אם $|f(z)| \leq M \cdot |z|^m$ עבור $|z| = R$ אז $\left|\int_{|z|=R,\mathrm{Im}z>0} e^{iz}\cdot f(z)dz\right| \leq M \cdot R^m \cdot 2\pi$ (לא בטוח)

P פולינום ממעלה n אז $P(\frac{1}{z})\cdot z^n$ פולינום עם מקדמים בסדר הפוך (אם P מתוקן אז 1 איבר חופשי בפול' החדש)

לסובב דברים זה תמיד טוב

לפונקציה זוגית יש רק חזקות זוגיות בטור לורן. בפרט, $res_0 f = 0$ ואפשר להגדיר g הולו' כך ש־$g(z^2) = f(z)$.

בהינתן f הולו' אפשר להפריד למקרים כש־f פולינום ולא פולינום, וכשהיא פולינום לזכור שיש לה אפסים לפי המשפט היסודי של האלגברה

בשביל להראות סוג סינגולריות, לפסול את האחרות תוך שימוש בכל תכונותיהן

אפשר להראות שוויון פונקציות על ידי הגזירה של המנה שלהן

אפשר לחסר קטבים ע"י חיסור של החלק השלילי של טור לורן שלהן (כשכופלים יוצרים קוטב באינסוף)

אפשר להגדיר פונקציה g שהיא מכפלת f מסובבת (כשיש נתון שהוא על חלק של צורה סימטרית לסיבובים)

אם ל־f יש קוטב ב־z_0, אז f שולחת סביבות פתוחות של z_0 לסביבות של ∞ (דורש הוכחה - $g(z) = \frac{1}{f(z)}$, היא הולו' בסביבה קטנה, ואפשר להשלים אותה להיות הולו' ב־0 ואז משפט ההעתקה הפתוחה)

אם ל־f יש קוטב ב־z_0, אז ל־e^f יש עיקרית ב־z_0 (עם הטענה הקודמת - ואז אפשר למצוא סדרה ממשית שואפת ל־∞ שהתמונה תשאף ל־∞ וסדרה מדומה טהורה שואפת ל־∞ עם $|\cdot| = 1$ ואז z_0 לא יכולה להיות קוטב/סליקה)

חישוב אינטגרלים

אם צריך לחשב cos או sin אז אפשר לרשום $e^{\cdot}$ ולקחת חלק ממשי או מדומה אחרי חישוב האינטגרל.

אם האינטגרל הוא של זווית, נחליף את sin ב־$\frac{z-z^{-1}}{2i}$ ואת cos ב־$\frac{z+z^{-1}}{2}$.

4 מסילות

חצי המעגל העליון (אינטגרל לא אמיתי עד אינסוף), מעגל היחידה (אינטגרל על זווית), חור המנעול (לוג, וחזקות לא שלמות), חצי המעגל העליון ללא הראשית (לא אמיתי עד אינסוף), משולש פיצה $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n}$, עצם $\int_0^1 (x(1-x))^{-\frac{1}{2}}\,dx$, מלבן $\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ixa}}{\cosh(\pi x)}dx$, מלבן עם שקעים (חלק פאזל) $\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{\sinh x}dx$

5 פיתוח טיילור

$e^z = \sum_{n=0}^\infty \frac{z^n}{n!}$, $\ln(1+z) = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n$ עבור $|z| < 1$

$\sin z = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ..$,

$\cos z = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ..$