גרפים מישוריים!

נניח על כל הגרפים שנדבר עליהם שהם קשירים.
<u>הגדרה:</u> גרף יקרא מישורי אם ניתן לצייר אותו במישור מבלי שהקשתות שלו נחתכות. נסמן ב-V את כמות הקודקודים, ב-E את כמות הקשתות וב-F את כמות הפאות בגרף.

טענות שנוכיח בהרצאה:

<u>נוסחת אוילר לגרפים מישוריים:</u> בכל גרף מישורי מתקיים: $V - E + F = 2$.

טענה: בכל גרף מישורי מתקיים $E \leq 3V - 6$.

הגדרות: K_5 הוא הגרף השלם על 5 קודקודים. $K_{3,3}$ הוא הגרף הדו-צדדי המלא עם שלושה קודקודים בכל צד.

טענה: K_5 ו-$K_{3,3}$ אינם מישוריים.

טענה: בגרף מישורי יש קודקוד שדרגתו היא 5 לכל היותר.

<u>משפט:</u> כל גרף מישורי ניתן לצבוע ב-5 צבעים.

<u>דוגמא:</u> בתוך ריבוע סומנו 20 נקודות, לאחר מכאן הועברו מספר קטעים בין הנקודות המסומנות לעצמן ולקודקודי הריבוע. התברר שהריבוע חולק למשולשים. כמה משולשים יש בחלוקה?

שאלות

1. משובע משוכלל חולק למחומשים ומשושים כך שכל קודקוד של המשובע הוא קודקוד של לפחות שני מצולעים מהחלוקה. מה הכמות המינימלית של חומשים שיש בחלוקה?

2. נתון פאות קמור שבו מכל קודקוד יוצאות 4 מקצועות. מצאו את הכמות המינימלית של פאות משולשיות בפאון.

3. נתון פאון קמור עם $10n$ פאות. הוכיחו כי קיימות n פאות עם כמות זהה של מקצועות.

4. הוכיחו את נוסחת פיק: עבור מצולע שקודקודיו בנקודות שלמות נסמן ב-B את כמות הנקודות השלמות על השפה של המצולע וב-I את כמות הנקודות השלמות הנמצאות בתוך המצולע אז מתקיים ששטח המצולע שווה

$$I + \frac{B}{2} - 1.$$

5. כל אחת ממקצועות של פאון קמור היא כביש חד סטרי, ידוע שלכל קודקוד יש לפחות כביש אחד שנכנס אליו ולפחות כביש אחד שיוצא ממנו. הוכיחו כי קיימות לפחות שתי פאות של הפאון שהמקצועות של כל אחת מהפאות האלו יוצרות מעגל.