25.03.2026

אי שוויון קרמטה

1. נגיד $(a_1, a_2, ..., a_n)$ מז'ורנטה של $(b_1, b_2, ..., b_n)$ ונסמן $(a_1, a_2, ..., a_n) \succ (b_1, b_2, ..., b_n)$ אם מתקיים:
$a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n$, $b_2 \geq b_2 \geq ... \geq b_n$ ו- $a_1 \geq b_1$, $a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2$, ...,
אבל בסוף $a_1 + a_2 + ... + a_n = b_1 + b_2 + ... + b_n$.
יהיה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ קמורה ו- $(a_1, a_2, ..., a_n) \succ (b_1, b_2, ..., b_n)$. הוכיחו כי:
$f(a_1) + f(a_2) + ... + f(a_n) \geq f(b_1) + f(b_2) + ... + f(b_n)$.

2. יהי x_i מספרים חיוביים ו- $0 < \alpha < 1$. הוכיחו כי:
$x_1^\alpha + x_2^\alpha + ... + x_n^\alpha > (x_1 + x_2 + ... + x_n)^\alpha$.

3. בכל משולש ועבור כל n טבעי הוכיחו כי:
$a^n + b^n + c^n \leq (a + b - c)^n + (a + c - b)^n + (b + c - a)^n$.

4. בררו, איזה מספר גדול יותר $2\sin 43^\circ + \sin 52^\circ + \sin 55^\circ$ או $\sin 40^\circ + \sin 44^\circ + \sin 53^\circ + \sin 56^\circ$?

5. פתרו את המשוואה: $3^x + 4^x = 2^x + 5^x$.

6. יהי $\{a, b, c\} \subset [0, 2]$ ו- $a + b + c = 3$.
מצאו את הערך המקסימלי של: $a^3 + b^3 + c^3$.

7. יהי a, b, c ו- d מספרים לא שליליים ו- $a + b + c + d = 4$. מצאו את הערך המינימלי של $\sqrt[4]{20a + 1} + \sqrt[4]{20b + 1} + \sqrt[4]{20c + 1} + \sqrt[4]{20d + 1}$.

8. עבור כל x ממשי הוכיחו כי: $2^{\sin^2 x} + 2^{\cos^2 x} \leq 3$.

9. יהי $\{a_1, a_2, ..., a_n\} \subset (0, 1)$.
הוכיחו כי: $(1 - a_1)(1 - a_2)...(1 - a_n) \geq 1 - a_1 - a_2 - ... - a_n$.

10. יהי $\{a_1, a_2, ..., a_n\} \subset [1, +\infty)$.
הוכיחו כי: $\frac{1}{1 + a_1} + \frac{1}{1 + a_2} + ... + \frac{1}{1 + a_n} \leq \frac{n - 1}{2} + \frac{1}{1 + a_1 a_2 ... a_n}$.

11. יהי a, b ו- c מספרים לא שליליים שסכומם שווה ל- 1.
הוכיחו כי: $\sqrt{9 - 32ab} + \sqrt{9 - 32ac} + \sqrt{9 - 32bc} \geq 7$.

12. יהיה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ קמורה. הוכיחו כי:
$f(a)+f(b)+f(c)+3f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \geq 2\left(f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f\left(\frac{a+c}{2}\right) + f\left(\frac{b+c}{2}\right)\right)$

13. הוכיחו כי: $|x| + |y| + |z| + |x + y + z| \geq |x + y| + |x + z| + |y + z|$.

14. בכל משולש חד זווית הוכיחו כי:
$\sqrt{\frac{a + b - c}{c}} + \sqrt{\frac{a + c - b}{b}} + \sqrt{\frac{b + c - a}{a}} \geq 3$.