16.11.2025

שיטת SOS(sum of squares)

1.יהי F רב איבר סימטרי עם משתנים a, b ו- c.
הוכיחו כי אם קיים רב איבר P כך ש-
$$F(a,b,c)=\sum_{cyc}((a-b)P(a,b,c)-(c-a)P(a,c,b))$$
, אזי קיימים רבי
איבר S_a, S_b ו- S_c עבורם מתקיים:
$F(a,b,c)=(a-b)^2S_c+(b-c)^2S_a+(c-a)^2S_b$.

2. רשום בצורה $(a-b)P(a,b,c)-(c-a)P(a,c,b)$.

א) $2a-b-c$; ב) $2bc-ab-ac$; ג) $ab+ac-b^2-c^2$; ד) a^2-bc.

3. יהי a, b ו- c מספרים ממשיים ו- $ab+ac+bc>0$.
הוכיחו כי: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$.

4. יהי a, b ו- c מספרים חיוביים.
הוכיחו כי: $\frac{a^2-bc}{\sqrt{a^2+bc}}+\frac{b^2-ac}{\sqrt{b^2+ac}}+\frac{c^2-ab}{\sqrt{c^2+ab}}\geq 0$.

5. יהי a, b ו- c מספרים לא שליליים ו- $a+b+c=3$.
הוכיחו כי: $\frac{a+b}{ab+9}+\frac{a+c}{ac+9}+\frac{b+c}{bc+9}\geq\frac{3}{5}$.

6. יהי a, b ו- c מספרים ממשיים
כך ש- $a+b+c=3$ ו- $\{ab,ac,bc\}\subset(-8,+\infty)$.
הוכיחו כי: $\frac{a+b}{ab+8}+\frac{a+c}{ac+8}+\frac{b+c}{bc+8}\geq\frac{2}{3}$.

7. יהי a, b, c, x, y ו- z מספרים ממשיים, $x+y+z\geq 0$ ו- $xy+xz+yz\geq 0$. הוכיחו כי: $x(b-c)^2+y(c-a)^2+z(a-b)^2\geq 0$.

8. יהי $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ ו- $\sqrt{c}$ אורכי צלעות של משולש. הוכיחו כי:
$a^3b^2+b^3c^2+c^3a^2\geq abc(a^2+b^2+c^2)$