גרפים

1. נתון גרף מכוון שבו לכל שני קודקודים u, v קיים מסלול מ-u ל-v או מ-v ל-u. מה היא כמות הקשתות המינימלית שצריך להוסיף לגרף בשביל שיהיה ניתן להגיע מכל קודקוד לכל קודקוד?

2. נתון גרף 2-קשיר ומסלול באורך l. הוכיחו כי בגרף יש מעגל באורך $\sqrt{2l}$ לפחות.

3. יהי $n \geq 2$, נתון גרף עם n^3 קודקודים. כל תת גרף בעל n קודקודים מכיל משולש. הוכיחו כי הגרף מכיל K_5.

4. מצאו את כל הגרפים G כך ש-$\chi(G) > 3$ וניתן לחלק את הקודקודים של G לשני תתי גרפים G_1, G_2 כך ש-$\chi(G_2) > 2, \chi(G_1) > 1$.
(הערה: $\chi(G)$ מסמן את מספר הצביעה של גרף).

5. איילה וברווז משחקים משחק על גרף קשיר G. בהתחלה איילה בוחרת כיוון לכל אחת מקשתות הגרף ומציבה אסימון באחד הקודקודים לבחירתה. לאחר מכאן בכל מהלך איילה מעבירה את האסימון לאחד הקודקודים השכנים (מותר לזוז רק עם כיוון הקשתות) ואז ברווז משנה את הכיוון של אחת הקשתות שנוגעות בקודקוד שהאסימון נמצא בו כרגע. אם איילה לא יכולה לבצע מהלך היא מפסידה. כתלות ב-G, קבעו למי יש אסטרטגיה מנצחת.

6. נתון גרף עם קודקודים 1010 מדרגה 1009 ו-1009 קודקודים מדרגה 1010. בכל שלב ניתן לבחור שלושה קודקודים u, v, w כך ש-u שכן של v, w אבל v, w לא שכנים, למחוק את הקשתות uv, uw ולצייר את הקשת vw. האם ניתן להגיע לגרף שבו כל הדרגות קטנות או שוות ל-1?

7. נתון גרף עם קליקה מקסימלית בגודל זוגי. הוכיחו כי ניתן לחלק את הגרף לשני תתי גרפים כך שגודל הקליקה המקסימלית בשניהם זהה.

8. יהי $n \geq 3$. במדינה רחוקה n נמלי תעופה ו-n חברות תעופה. לכל חברת תעופה מתאים שלם אי-זוגי m ונמלי תעופה $c_1, \ldots, c_m$, חברת התעופה מפעילה m קווי תעופה במעגל $c_1 - c_2 - \ldots - c_m - c_1$. הוכיחו כי ניתן למצוא מעגל אי-זוגי שבו כל קוו מופעל על ידי חברת תעופה אחרת.

9. נתון גרף קשיר עם $2n$ קודקודים ואנטי-קליקה **יחידה** מגודל n. הוכיחו כי קיים קודקוד שאינו חלק מהאנטי קליקה שאם נוריד אותו מהגרף, הגרף ישאר קשיר.