פרמה

<u>משפט פרמה הקטן:</u> יהי p ראשוני ו-a זר ל-p אזי
$a^{p-1} \equiv 1 \ mod \ p$.

1. נתון ראשוני $p \neq 2,5$. האם קיים מספר שמתחלק ב-p ובירושם העשרוני שלו מופיעה רק הספרה 1?

2. נתונה סדרה חשבונית a_n שבה ההפרש זר לאיבר הראשון. הוכיחו כי ניתן למצוא שלם b ותת-סדרה אינסופית של a_n שבה כל האיברים הם חזקות שלמות של b.

3. הוכיחו כי קיימים אינסוף מספרים טבעיים שלא ניתן להציגם בצורה:
א. $a^3 + b^3 + c^3$ כאשר a, b, c שלמים.
ב. $a^6 + b^6 + c^6 + d^6 + e^6 + f^6$ כאשר $a, b, \dots, g$ שלמים.

4. האם לכל ראשוני p וטבעי c קיים x כך ש $x^x = c \ (mod \ p)$?

5. הוכיחו כי לכל ראשוני p קיים n עבורו $6^n+3^n+2^n-1$ מתחלק ב-p.

6. האם קיימת סדרה $p_1, p_2, \dots$ של מספרים ראשוניים המקיימת ש-$p_{n+1} = 2p_n + 1$ לכל $n \geq 1$?

7. נתונים $x_1, x_2, \dots, x_n$ שלמים כך ש $x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3 = 2002^{2002}$. מצאו את הערך הקטן ביותר של n.

8. יהי p ראשוני. הוכיחו כי $7p + 3^p - 4$ אינו ריבוע שלם.

9. מצאו את כל הפתרונות השלמים של המשוואה $a^3+3ab^2+7b^3=2011$.

10. מצאו את כל הפתרונות השלמים של המשוואה $5x^2 - 2y^5 = 1009$.

11. א. יהי ראשוני p, הוכיחו כי כל המחלקים הראשוניים של $2^p - 1$ הם 1 מוד p.
ב. יהי ראשוני p. הוכיחו כי קיימים אינסוף ראשוניים מהצורה $kp + 1$ עבור k טבעי.

12. האם קיים k כך שהמכפלה של k הראשוניים הראשונים היא מספר מהצורה $a^n + 1$ עבור a, n שלמים גדולים מ-1?

בתאבון!