חשבון בריצנטרי

הגדרה

טענה. בהינתן משולש ABC, ניתן לייצג כל נקודה במישור בתור $uA+vB+wC$ כאשר $u+v+w=1$.

הגדרה. *קואורדינטות בריצנטריות* זו מערכת קואורדינטות שבה $(u:v:w)$ מתאר את הנקודה $\frac{uA+vB+wC}{u+v+w}$.

נגדיר את הקואורדינטות המנורמלות של נקודה להיות (u,v,w) כאשר $u+v+w=1$.

כמה תכונות בסיסיות (שבאמת הופכות את זה לקואורדינטות פרויקטיביות):

- נשים לב שזה מוגדר היטב פרויקטיבית (כלומר אינווריאנטי לכפל בסקלר).
- הנקודות $u+v+w=0$ הן בעצם ישר האינסוף.
- ישרים במישור מיוצגים ע"י משוואות לינאריות $pu+qv+rw=0$.

הדרך הכי פשוטה להיווכח בכל התכונות האלה היא לשים את A,B,C על המישור $z=1$ ב-$\mathbb{R}^3$. זה נותן בסיס ל-$\mathbb{R}^3$ וקואורדינטות פרויקטיביות ביחס לבסיס זה הן בדיוק קואורדינטות בריצנטריות.

תכונות גיאומטריות

נשים לב שקואורדינטות בריצנטריות הן מרכז מסה, ולכן מקיימות מספר תכונות בסיסיות של מרכזי מסה.

דוגמאות בסיסיות:

- הקודקודים מקיימים $A=(1:0:0)$
- מרכז המסה של המשולש הוא $M=(1:1:1)$
- אמצעי הצלעות הם $(0:1:1)$

באופן כללי יותר:

1. אם נקודה P מחלקת את BC ביחס $BP:PC=r:q$, הקואורדינטות הבריצנטריות שלה הן $(0:q:r)$.
2. אם $P=(p:q:r)$, הישר AP מוגדר ע"י המשוואה $\frac{v}{w}=\frac{q}{r}$ (או $vr-qw=0$).
   (אכן, זוהי משוואת ישר שעובר גם ב-P וגם ב-A).
3. בפרט, חיתוך הישר AP עם BC הוא $(0:q:r)$.
4. אם $P=(u,v,w)$ (מנורמל), אז $u=\frac{S_{PBC}}{S_{ABC}}$.

בנוסף, מהיותן של הקואורדינטות פרויקטיביות, נקבל את שני התנאים השימושיים הבאים:

1. שלוש נקודות הן על ישר אחד אמ"מ הדטרמיננטה של המטריצה שלהן היא 0.
2. שלוש ישרים עוברים בנקודה אחת אמ"מ הדטרמיננטה של המטריצה שלהן היא 0.

מכאן נוכל גם לגזור את משוואת הישר דרך $(u_1:v_1:w_1),(u_2:v_2:w_2)$ (ובאופן שקול נוסחה לחיתוך ישרים):

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u & v & w \end{vmatrix} = 0$$

$$(v_1w_2-v_2w_1)u+(w_1u_2-w_2u_1)v+(u_1v_2-u_2v_1)w=0$$

נוסחאות מרחק

כדי לדבר על מרחקים וזוויות, צריך לדבר על וקטורים בין נקודות ולא סתם על נקודות. למשל, אפשר להסתכל על הפרש בין שתי נקודות מנורמלות. באופן כללי יותר, נדבר על וקטורים (בלי יחס שקילות) (u,v,w) שמקיימים $u+v+w=0$.

<u>טענה</u>. בהינתן $(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)$ שמקיימים $x_1+y_1+z_1=x_2+y_2+z_2=0$, המכפלה הפנימית בין הוקטורים הרלוונטיים היא:

$$\langle (x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)\rangle :=: \left\langle \sum_{cyc} x_1 A\,,\sum_{cyc} x_2 A \right\rangle =$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{cyc} a^2(y_1z_2+z_2y_1) = \sum_{cyc}\frac{b^2+c^2-a^2}{2}x_1x_2$$

<u>הוכחה</u>: נבחר את ראשית הצירים להיות O (בגלל שהסכום 0 יש לנו חופש לבחור את הראשית).

$$\left\langle \sum_{cyc} x_1 A\,,\sum_{cyc} x_2 A \right\rangle = R^2\sum_{cyc} x_1x_2 + \sum_{cyc}\langle \overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\rangle (y_1z_2+y_2z_1)$$

$$= R^2\sum_{cyc} x_1x_2 + \sum_{cyc} R^2\cos(2\alpha)\,(y_1z_2+y_2z_1)$$

$$= R^2\left[\sum_{cyc} x_1x_2 + \cos(2\alpha)\,(y_1z_2+y_2z_1)\right]$$

נשים לב ש-$\sum_{cyc} x_1x_2 + (y_1z_2+y_2z_1)$ זה $\left(\sum_{cyc} x_1\right)\left(\sum_{cyc} x_2\right)$ ולכן מתאפס. אם נשתמש בכך ובנוסף נזכור ש-$\cos(2\alpha)-1=-2\sin^2\alpha$ ו-$(-2R^2\sin^2\alpha)=-\frac{1}{2}a^2$ לפי משפט הסינוסים, נקבל את הנוסחה הראשונה. הנוסחה השנייה נובעת ממניפולציה אלגברית על הנוסחה הראשונה תוך שימוש בתנאי על סכום 0. מש"ל

<u>הבחנה (לפעמים שימושית)</u>: אם $x_1+y_1+z_1=0$ אבל $x_2+y_2+z_2\neq 0$, הנוסחה הראשונה עדיין נכונה כל עוד אנחנו עובדים עם ראשית ב-O.

נוסחאות נוספות

נסמן $S_\varphi := 2S\cdot\cot\varphi$.

זה נקרא סימון $Conway$, ושימושי לפעמים בשאלות. יש מספר תכונות שלו שאולי שווה לזכור, שמופיעות בדף נוסחאות. בנוסף, הטענה הבאה יכולה להיות שימושית:

<u>טענה</u>: נקודה P מקיימת $\angle CBP=\theta,\angle BCP=\varphi$. אז $P=[-a^2:S_\gamma+S_\varphi:S_\beta+S_\theta]$.