חכמים וקוסמים

1. n קוסמים יושבים סביב שולחן עגול. כל אחד מהם חובש כובע שחור או לבן, ורואה את צבעי הכובעים של כל הקוסמים פרט לכובע של עצמו. בכל דקה, המלך ארתור מצלצל בפעמון, וכל אחד מהקוסמים בוחר קוסם אחר באופן סודי ומטיל עליו כישוף (אסור לקוסם לכשף את עצמו, ואסור לו שלא לכשף אף אחד). כל קוסם יודע כמה קוסמים אחרים כישפו אותו, אך לא יודע מי הם.
לאחר k צלצולי פעמון, כל הקוסמים מנחשים בו-זמנית מהו הצבע של הכובע אותו הם חובשים. לקוסמים מותר לגבש אסטרטגיה לפני הכניסה לחדר, אך לאחר מכן אסור להם לתקשר. מהו ה-k המינימלי עבורו הקוסמים מסוגלים להבטיח שכולם יהיו צודקים?

2. המלך זימן שני חכמים. הוא נתן לחכם הראשון 100 כרטיסי נייר ריקים, וציווה עליו לכתוב על כל כרטיס מספר טבעי (המספרים לא חייבים להיות שונים), בלי להראות את הכרטיסים לחכם השני. לאחר מכן החכם הראשון יכול להגיד לחכם השני כמה מספרים שונים, שכל אחד מהם שווה לסכום המספרים על חלק מהכרטיסים (יכול להיות כרטיס אחד), אבל בלי להגיד איך הוא יצר כל מספר. החכם השני צריך לגלות את 100 המספרים אשר כתובים על הכרטיסים, ולהוכיח למלך שזאת האופציה היחידה. אם הוא לא יצליח, יערפו לשני החכמים את הראש. אם הוא יצליח לספק את ההוכחה, המלך יתלוש מהזקן של כל אחד מהחכמים מספר שערות ככמות המספרים שהחכם הראשון אמר לחכם השני. כיצד החכמים יכולים להישאר בחיים ולאבד מספר מינימלי של שערות, אם הם לא יכולים לתאם מראש?

3. דרקון תפס את 6 הגמדים. לדרקון יש 7 כובעים ב-7 צבעי הקשת (ידועים מראש). הוא הולך להעביר להם בבוקר מבחן תבונה – הגמדים יעצמו עיניים, הדרקון ישים כובע אחד על ראש של כל גמד ואז הגמדים יתבקשו בו-זמנית לנחש, מה צבע הכובע שלהם. הדרקון מאיים שאם פחות מחצי ינחשו נכון, הוא יוכל את כולם. האם הגמדים יוכלו לשרוד?

4. המלך מזמין למשתה 2025 חכמים על כל אחד הוא שם כובע בצבע כלשהו (הצבעים לא ידועים מראש ויכולים להיות כמה עם אותו הצבע) לאחר מכן המלך מבקש מכל חכם ללחוש לו באוזן כמה חכמים במשתה לובשים כובע עם אותו הצבע שלו. במידה ואף חכם לא מנחש נכון הם מוצאים להורג. כיצד החכמים יוכלו לשרוד?

5. במעגל עומדים N חכמים. על ראשיהם כובעים, כאשר כל כובע יכול להיות באחד מ-100 צבעים הידועים מראש. כל אחד רואה את כל הכובעים חוץ מהכובע שלו. כל החכמים מנחשים בו זמנית את צבע הכובע שלהם. האם הם יכולים לתאם אסטרטגיה מראש, כך שלפחות אחד מהם בהכרח יצליח לנחש נכון? (התשובה תלויה ב-N.)

6. המלך הזמין למשתה 2015 קוסמים, חלקם טובים וחלקם רעים. כל הקוסמים יודעים מי טוב ומי רע, אך המלך אינו יודע דבר. קוסם טוב תמיד אומר אמת, וקוסם רע מחליט בכל רגע אם להגיד אמת או שקר. במשתה, המלך ישאל כל אחד מהקוסמים שאלה אחת (שהתשובה עליה היא "כן" או "לא"). הקוסמים יענו לו על השאלות בו-זמנית, לאחר שאילת כל השאלות. לאחר קבלת התשובות, המלך יבחר קוסם אחד ויגרש אותו לביתו. הקוסם המגורש יצא דרך "דלת האש", שמגלה למלך האם הקוסם היה טוב או רע. לאחר מכן המלך שוב ישאל כל אחד מהקוסמים שנותרו שאלה אחת, ושוב יגרש את אחד הקוסמים, וכן הלאה, עד שהמלך יחליט לעצור ולא לגרש עוד קוסמים. המלך יכול לעצור גם לאחר קבלת התשובות, מבלי לגרש קוסם. הוכיחו כי המלך יכול לגרש את כל הקוסמים הרעים, תוך גירוש קוסם אחד טוב לכל היותר.

7. המלך החליט לפנק קבוצה של n חכמים. הוא שם אותם בטור אחד אחרי השני (כך שכולם מסתכלים לאותו כיוון). המלך שם לכל אחד כובע לבן או שחור על הראש, כך שכל אחד מהם רואה את הכובעים של אלה שעומדים לפניו. החכמים אומרים לפי הסדר (מהאחרון בטור לראשון) צבע (לבן או שחור) ומספר שלם חיובי לבחירתם. בסוף המלך סופר כמה חכמים אמרו את הצבע של הכובע שעל ראשם, וזו כמות ימי החופשה שכל קבוצת החכמים תקבל. המלך הרשה לחכמים לסכם ביניהם מראש מה להגיד. אלא שאז החכמים גילו ש-k מתוכם משוגעים ואומרים צבע ומספר בלי קשר למה שסוכם מראש (לא יודעים מי המשוגעים). מהו מספר ימי החופשה המקסימלי שהחכמים יכולים להבטיח לעצמם, ללא תלות במיקומם של החכמים המשוגעים בטור?

8. על ראשיהם של 99 חכמים היושבים סביב שולחן עגול הלבישו 50 קובעים בצבע אחד ו-49 קובעים בצבע אחר (אבל לא ידוע להם מאיזה צבע יש יותר כובעים). כולם מנחשים את הצבעים שלהם בו-זמנית. האם הם יכולים לתאם מראש אסטרטגיה שתאפשר להם לתת לפחות 74 ניחושים נכונים בכל מקרה?

9. ל-11 חכמים מכסים את העיניים, ובזמן שהם לא רואים מלבישים לכל אחד כובע באחד מ-1000 צבעים אפשריים. נותנים להם להסתכל זה על זה, ואז כל אחד רואה את הצבע של הכובעים של כולם חוץ מעצמו. לאחר מכן, כל אחד מראה לאחרים כרטיס לבן או שחור, לפי בחירתו. אחרי שהם רואים את הכרטיסים, כולם צריכים לנחש בו-זמנית את צבעי הכובעים שלהם. האם הם יצליחו? החכמים יכולים להחליט על השיטה מראש בוועדת החכמים.

10. 1000 חכמים מסתדרים בשורה. יש כובעים הממוספרים מ-1 עד 1001. כובע אחד מוחבא, ואת האחרים מלבישים על החכמים בסדר אקראי. כל חכם רואה רק את הכובעים של אלה שלפניו. לאחר מכן, כל חכם, לפי הסדר (כאשר האחורי ראשון והקדמי אחרון), אומר בקול רם מספר שלם. כל מספר שנאמר צריך להיות בין 1 ל-1001, אבל אסור להגיד מספר שכבר נאמר. מטרת החכמים היא שכמות החכמים שאמרו את מספר הכובע שלהם תהיה גדולה ככל הניתן. החכמים יכולים לתאם אסטרטגיה מראש.

א. האם הם יכולים להבטיח שלפחות 500 יצדקו?

ב. האם הם יכולים להבטיח שלפחות 999 יצדקו?

11.בילבו וגנדלף מראים קסם. בהתחלה הם בוחרים מתנדב בשם ניצן וגנדלף יוצא מהחדר. יש לוח 8×8, ניצן מציב אסימון לבן או שחור בכל משבצת ובוחר את אחת המשבצות ומגלה לבילבו איזו משבצת בחר. בילבו מחליף את האסימון באחת המשבצות (משחור ללבן או להפך) ואז גנדלף נכנס לחדר ואומר לניצן איזו משבצת הוא בחר. כיצד מתבצע הקסם?

12. יוליוס קיסר מצווה על שני עבדים לשעשע אותו במשחק מלחמה. נתונה חפיסה של N קלפים ועל כל שני קלפים A, B ידוע מי חזק יותר (אם A חזק מ-B ו-B חזק מ-C אז לא בהכרח A חזק מ-C). בכל מהלך כל עבד משחק את הקלף העליון בחפיסה שלו ומי ששיחק את הקלף החזק יותר לוקח את שני הקלפים ושם בתחתית החפיסה שלו בסדר שהוא בוחר. העבדים לא מקבלים אוכל עד שהמשחק לא מסתיים, האם העבדים יאכלו (יש להניח שהעבדים הם פרה ספרית בואקום ויכולים לשרוד ללא אוכל כמות אינסופית של זמן)?

