# תרגיל סביר

בתרגיל זה נפתור שאלות בקומבינטוריקה בעזרת הסתברות.

## קצת רקע בהסתברות

**הגדרה.** *משתנה מקרי (מ"מ)* $X$ זה משהו שמקבל ערכים מסוימים בסיכויים מסוימים. למשל תוצאה של הטלת קובייה.

**הגדרה.** *התוחלת של משתנה מקרי* $X$, $E[X]$, זה הממוצע המשוקלל של ערכי $X$:

$$E[X] = \sum_x x \cdot P(X = x)$$

(אפשר לחשוב על זה גם כ"אם נחזור על $X$ הרבה פעמים, מה הממוצע").

**דוגמה.** אם $X$ הוא משתנה מקרי שמקבל 1 בסיכוי $p$ ו-0 בסיכוי $(1-p)$, התוחלת שלו היא $0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$.

**משפט.** תוחלת היא לינארית, כלומר $E[X+Y] = E[X] + E[Y]$.

**משפט טריוויאלי אבל שימושי.** אם $E[X] = k$, אז יש סיכוי חיובי ש-$X \geq k$.

## דוגמאות

*שאלה.* כמה נקודות שבת יש לתמורה ממוצעת על $n$ איברים?

*פתרון.* נסמן ב-$X_i$ את "האם $i$ הוא נקודת שבת" (1 אם כן, 0 אם לא) כשמגרילים תמורה כלשהי. אז $X = X_1 + \cdots + X_n$ הוא כמות נקודות השבת בתמורה אקראית, ולכן צריך לחשב את $E[X]$. מלינאריות התוחלת,

$$E[X] = E[X_1] + \cdots + E[X_n]$$

אבל קל לראות שכל $X_i$ הוא מ"מ שמקבל 1 בסיכוי $\frac{1}{n}$ ו-0 אחרת, ולכן $E[X_i] = \frac{1}{n}$ ולכן $E[X] = 1$. מש"ל

*שאלה.* 35 ילדים במחנה מנסים לקבוע פגישה שבועית. יש 6 ימים בשבוע שאפשר לעשות פגישה. בכל יום יכולים לפחות 30 מהילדים. הוכיחו שיש ילד שיכול לעשות פגישה בכל יום.

*פתרון.* נבחר ילד באקראי. בכמה ימים הוא יכול? נסמן ב-$X_i$ את האם הוא פנוי ביום ה-$i$. אז $X = X_1 + \cdots + X_6$ זו כמות הימים שהוא פנוי בהם. לפי הנתון, כל $X_i$ הוא 1 בסיכוי $\frac{30}{35}$. לכן $E[X] = \frac{30}{35} \cdot 6 = \frac{36}{7} = 5\frac{1}{7}$. לכן חייב להיות לפחות ילד אחד עבורו $X \geq 5\frac{1}{7}$ אבל $X$ שלם כלומר $X = 6$ עבור הילד הזה. מש"ל

# שאלות

1. נתונים שני מצולעים משוכללים עם $2n$ קודקודים כל אחד. בכל מצולע, חצי מהקודקודים צבועים בשחור וחצי בלבן. הוכיחו שאפשר לשים אותם אחד על השני כך שהצבעים מתלכדים בלפחות $n$ מהקודקודים.

2. הראו כי לכל גרף עם $n$ קודקודים ו-$m$ קשתות יש תת גרף דו-צדדי עם לפחות $\frac{m}{2}$ קשתות.

3. באולימפיאדה מתמטית במדינה זרה השתתפו 200 מתחרים, והיו בה 6 שאלות. כל שאלה נפתרה על ידי לפחות 120 מתחרים. הוכיחו שיש שני מתחרים שפתרו יחד את כל השאלות.

4. נתון גרף דו-צדדי עם $n$ קודקודים בכל צד, כך שיש בו לפחות $n^2 - n + 1$ קשתות. הוכיחו כי ניתן למצוא זיווג מושלם.

5. הראו כי קיים טורניר על $n$ קודקודים שבו יש לפחות $\frac{n!}{2^{n-1}}$ מסלולי המילטון (טורניר הוא גרף מכוון מלא, מסלול המילטון הוא מסלול שעובר בכל הקודקודים).

6. הוכיחו כי ניתן לצבוע את המספרים השלמים בין 1 ל-2020 ב-4 צבעים כך שלא תיווצר סדרה חשבונית מונוכרומטית באורך 10.

7. בכנס השתתפו 1,600 מדענים. המדענים התחלקו ל-16,000 קבוצות מחקר, בכל קבוצת מחקר היו בדיוק 80 מדענים. הראו כי ניתן למצוא שתי קבוצות מחקר עם לפחות 4 מדענים משותפים.

8. נתונים $m, n$ שלמים חיוביים ו-$p, q$ ממשיים חיוביים שסכומם 1. הוכיחו כי

$$(1 - p^n)^m + (1 - q^m)^n \geq 1$$

9. בארץ התיכונה גרים אלפים וגמדים, לכל גמד יש לפחות אלף אחד שהוא חבר שלו. הוכיחו כי ניתן לבחור קבוצה המכילה לפחות מחצית מאוכלוסיית האלפים והגמדים כך שלכל גמד ב קבוצה תהיה כמות אי-זוגית של אלפים חברים בקבוצה.

10. הוכיחו שבכל גרף $G = (V, E)$ יש אנטי-קליקה בגודל לפחות $\sum_{v \in V} \frac{1}{\deg v + 1}$.

11. נתונים $n, k$ כך ש-$n \geq 2k$. נתונה משפחה $\mathcal{F}$ של תתי קבוצות של $\{1, \dots, n\}$ כך שכל $A \in \mathcal{F}$ היא בגודל $k$ וכל $A, B \in \mathcal{F}$ נחתכות. הוכיחו כי $|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{k-1}$.

12. תהא $X$ קבוצה של מספרים שלמים בגודל $n$. הוכיחו כי קיימת תת קבוצה $A$ של $X$ בגודל לפחות $\frac{n}{3}$ כך שלא קיימים $a, b, c \in A$ המקיימים $a + b = c$.