אלימות קומבינטורית

1. על השולחן נשפכו שני שקים של מטבעות זהים למראה. בכל שק היו 144 מטבעות; כל אחד מהמטבעות מהשק הראשון הוא ממשקל x, וכל אחד מהמטבעות מהשק השני הוא ממשקל y. האם אפשר ב-3 שקילות בלבד לבדוק האם $x = y$?

2. לצייר מודרני יש לוח משבצות 10×10 ו-3 צבעים. בכל שלב ושלב הוא יכול לצייר ריבוע כחול 1×1, ירוק 2×2 או אדום 3×3. כל ריבוע כזה מורכב ממשבצות שלמות. לפי חוקי האסטטיקה, אסור לשני ריבועים באותו צבע לגעת בצלע או בקודקוד, ואסור לצבוע משבצת כלשהי יותר מפעם אחת. נסו להגיע לציור עם כמה שפחות משבצות לבנות (ניקוד חלקי יינתן על תוצאות חלקיות וחסמים).

3. נתונה טבלת משבצות 33×4. כל משבצת שחורה או לבנה. זברה רוצה לשנות צבעים במספר משבצות, כך שכל ריבוע 2×2 יכיל מספר זוגי של משבצות לבנות. כבור איזה N ניתן להבטיח שזברה תוכל להשיג את מטרתה כשהיא משנה צבעים ל-N משבצות לכל היותר?

4. נתונים 11 גלילי בד, כל גליל הוא בד באורך 10 מטרים. צריך לחלק אותם באופן שווה בין 5 אנשים, ככה שכל אחד יקבל 22 מטרים של בד. רוצים לעשות זאת כך שבמהלך החלוקה לא יוצרו חלקים באורך פחות מ-s, כאשר s מספר ממשי. עבור איזה s קטן ביותר זה אפשרי?

5. שני אנשים מחלקים גבינה. תחילה הראשון מחלק אותה לשני חלקים, אחריו השני בוחר בחלק אחד ומחלק אותו גם הוא לשני חלקים. כך הם ממשיכים עד שמתקבלים חמישה חלקים. כעת הראשון לוקח לעצמו חלק, אחריו השני לוקח לעצמו חלק מבין החלקים שנותרו, שוב תורו של הראשון לקחת וכך הלאה עד שלא ישארו חלקים. מצא/י מהי הכמות הרבה ביותר של גבינה שיכול כל אחד מהשניים להבטיח לעצמו, ללא תלות בפעולותיו של השני.

6. בקופסה יש $1000^3 + 1$ קוביות באותו גודל, כל פאה של כל קוביה צבועה בצבע מסוים. ניתן להצמיד שתי קוביות כאשר שתי הפאות המוצמדות הן באותו צבע. נתון שאם שמים קוביה כלשהי בצד, אפשר להרכיב מיתר הקוביות קובייה אחת גדולה. האם יתכן שכל שתי קוביות צבועות באופן שונה?

7. בכיתה יש 30 תלמידים. לכבוד ט"ו בשבט כל תלמיד בחר כמה פירות יבשים מתוך n סוגים. נגיד ששני תלמידים הם חברים אם הם בחרו פרי מאותו הסוג. מצאו את ה-n המינימלי כך שיתכן שלכל תלמיד יש

(א) בדיוק 3 חברים; (ב) בדיוק 6 חברים.

בהצלחה!