טריגו!

1. פתרו את המערכת

$$\begin{cases} x = 2y^2 - 1 \\ y = 2z^2 - 1 \\ z = 2x^2 - 1 \end{cases}$$

2. סדרה מקיימת $a_0 = 2025, a_{n+1} = \frac{1+a_n}{1-a_n}$, מצאו את a_{2025}.

3. פתרו את המשוואה

$$\sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2 + x}}} = x$$

4. תהי הסדרה המוגדרת באופן הבא: $a_1 = x, a_{n+1} = 4a_n(1 - a_n)$. מצאו את כמות הערכים השונים של x עבורם $a_{2025} = 0$.

5. כמה שורשים בקטע $[0,1]$ יש למשוואה

$$8x(1 - 2x^2)(8x^4 - 8x^2 + 1) = 1$$

6. מבין הפתרונות הממשיים של המערכת

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z^2 + t^2 = 9 \\ xt + yz = 3 \end{cases}$$

מצאו את הערך המקסימלי של $x + z$.

7. הוכיחו כי

$$(ab + bc + ca - 1)^2 \leq (a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)$$

8. נגדיר סדרה בתור $a_1 = 1$,

$$a_{n+1} = a_n + \sqrt{a_n^2 + 1}$$

חשבו את $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{a_n}$.

9. מצאו את הn הקטן ביותר עבורו בכל קבוצה של n מספרים בהכרח יהיו שני מספרים שונים x, y עבורם:

$$(3x^2-1)(3y^2-1)+8(1+3xy)>0$$

10. פתרו את המערכת:

$$\begin{cases} xy+yz+zx=1 \\ 3\left(x+\frac{1}{x}\right)=4\left(y+\frac{1}{y}\right)=5\left(z+\frac{1}{z}\right) \end{cases}$$

11. נתונים $a,b,c,d>0$ שמקיימים $a+b+c+d=abc+abd+acd+bcd$, הוכיחו כי:

$$2\le\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}+\frac{2}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}+\frac{2}{\sqrt{1+d^2}}\le 2\sqrt{5}$$