שמורות וחצי

1. רשימת מספרים $a_1, a_2, \ldots, a_n$ רשומים בשורה. בכל מהלך נינתן לבחור אינדקס $i \le n-3$ כך ש-$(a_i - a_{i+3})(a_{i+1} - a_{i+2}) < 0$ ולהחליף את הסדר בין a_{i+1} ל-a_{i+2}. הוכיחו כי התהליך הוא סופי.

2. מספרים שלמים $a_1, \ldots, a_n$ רשומים בשורה. בכל מהלך ניתן לבחור אינדקס i כך ש-$a_i > a_{i+1}$ ולהחליף את הזוג (a_i, a_{i+1}) באחד הזוגות $(a_{i+1}+1, a_i)$ או $(a_i - 1, a_i)$. הוכיחו כי התהליך סופי.

3. $2m$ לפרקונים עומדים במעגל. בהתחלה לאחד מהם n בטבעות זהב. כל דקה, כל לפרקון שברשותו לפחות שני מטבעות מעביר טבע אחד ללפרקון משמאלו ומטבע אחד ללפרקון מימינו.

א. הוכיחו שאם $n = 2m$ אז התהליך לא יסתיים.

ב. הוכיחו שאם $n < 2m$ אז התהליך יסתיים.

4. על לוח רשומים $2n$ מספרים שלמים עוקבים. בכל מהלך, מחלקים את המספרים לזוגות באופן שרירותי, וכל זוג מוחלף בסכום והפרש של שני המספרים שהיו (לא חייבים להחסיר את הקטן מהגדול, כל ההחלפות מתבצעות בו-זמנית). הראו שהלוח לעולם לא יגיע שוב למצב שבו רשומים $2n$ מספרים עוקבים.

5. על הלוח רשום הזוג $(1,1)$. בכל מהלך, אם רשום על הלוח הזוג $(x, y-1)$ אפשר להחליף אותו בזוג $(x+y, y+1)$ ולהיפך. בנוסף אם רשום על הלוח את הזוג (x, xy) ניתן להחליף אותו ב-$\left(\frac{1}{x}, y\right)$ ולהיפך. האם ניתן לגרום למספר השמאלי להיות שלילי?

6. יהי $n > 1$ שלם. נתונים $x_1, \ldots, x_n$ ממשיים חיוביים. בכל מהלך ניתן להחליף זוג x, y במספר

$$\frac{x^2 + 6xy + y^2}{x+y}.$$

בסוף התהליך יתקבל מספר c. הוכיחו כי $c \le n(x_1 + \cdots + x_n)$.

7. במישור נתונות נקודות $P_1, \ldots, P_n$ ועיגול עם רדיוס R החוסם חלק מהנקודות. בשלב ה-$i+1$ נבנה מעגל עם רדיוס R שמרכזו במרכז המסה של הנקודות החסומות בעיגול שנבנה בשלב ה-i. הוכיחו כי התהליך יתייצב, כלומר משלב מסוים כל המעגלים שנבנה יהיו זהים.

8. על הלוח המספר "1" רשום 2^n פעמים. בכל שלב ניתן לבחור שני מספרים a, b שרשומים על הלוח, למחוק אותם ובמקומם לרשום $a+b, a+b$. הוכיחו כי לאחר $n \cdot 2^{n-1}$ פעולות סכום המספרים על הלוח יהיה לפחות 4^n.

9. בשורה מוצבים n אבני רברסי. בתחילת המשחק כל האבנים מונחות עם החלק הלבן למעלה. בכל שלב ניתן לבחור אבן עם הצד הלבן כלפי מעלה, להוציא אותה מהשורה ולהפוך את האבן משמאלה ואת האבן מימינה, אסור להוציא את האבנים הקיצוניות ביותר. הוכיחו כי ניתן להגיע למצב עם שתי אבנים בלבד אם ורק אם $n-1$ לא מתחלק ב-3.

10. במדינה גרים מספר אנשים. חלק מזוגות האנשים הם שכנים זה של זה. לכל אחד במדינה יש כמות כסף כלשהי בבנק (הבנק מאפשר לאנשים להיכנס למינוס). יום אחד, נחקק חוק במדינה, שאומר שביום הראשון של כל חודש, כל אדם צריך לתת מטבע כסף אחד לכל שכן שלו שבסוף החודש הקודם היה יותר עני ממנו. הוכיחו שכעבור זמן מה, האנשים במדינה יכנסו למחזור באורך שתיים, כלומר כל חודשיים המצב יחזור למה שהיה קודם.

11. איילה וברווז משחקים על לוח שרשום עליו 2022 פעמים המספר 1. בכל תור איילה בוחרת זוג מספרים x, y שרשומים על הלוח, ואז ברווז מוחק אותם ורושם במקום את $x+y$ או את $|x-y|$. המשחק נגמר כאשר מתקיימים אחד מהתנאים הבאים:

- קיים בלוח מספר שגדול מסכום המספרים האחרים.
- כל המספרים שעל הלוח הם אפסים.

לבסוף ברווז נותן לאיילה דגים ככמות המספרים שעל הלוח. מצאו את כמות הדגים שאיילה תקבל בהנחה ששניהם משחקים אופטימלי.