פתרונות לפולינומים!

כל הפולינומים הם עם מקדמים ממשיים, אלא אם נאמר אחרת

1. יהא P פולינום. נגדיר $Q(x)=(x-1)P(x)$. האם יכול להיות שכל המקדמים של Q חיוביים?

פתרון: נסמן $Q(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$. מתקיים

$$0=(1-1)P(0)=Q(0)=a_n+\cdots+a_1+a_0$$

ולכן לא יכול להיות שכל $a_0,\dots,a_n$ חיוביים.

2. פולינום נקרא *מגניב* אם סכום המקדמים של מונומים בעלי מעלות זוגיות שווה לסכום המקדמים של מונומים בעלי מעלות אי-זוגיות. יהא P פולינום כלשהו ו-Q פולינום מגניב. האם PQ בהכרח מגניב?

פתרון: יהא $R(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$ פולינום כלשהו. מתקיים

$$R(-1)=a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots=(a_0+a_2+\cdots)-(a_1+a_3+\cdots)$$

לכן R מגניב אמ"מ $R(-1)=0$. לכן, אם Q מגניב אז $Q(-1)=0$ ואז $P(-1)Q(-1)=0$ ולכן PQ מגניב גם הוא.

3. יהא $P(x)=x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+1$ פולינום בעל 5 שורשים ממשיים. כמה שורשים ממשיים יש לפולינום $Q(x)=x^5+dx^4+cx^3+bx^2+ax+1$? מצאו את כל האפשרויות.

פתרון: מתקיים

$$P\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^5}+\frac{a}{x^4}+\frac{b}{x^3}+\frac{c}{x^2}+\frac{d}{x}+1=\frac{1}{x^5}(1+ax+bx^2+cx^3+dx^4+x^5)=\frac{1}{x^5}Q(x)$$

יהיו $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$ השורשים (הלאו דווקא שונים) של P. אז מתקיים

$$P(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4)(x-\alpha_5)$$

$$\begin{aligned}Q(x)&=x^5P\left(\frac{1}{x}\right)=x^5\left(\frac{1}{x}-\alpha_1\right)\left(\frac{1}{x}-\alpha_2\right)\left(\frac{1}{x}-\alpha_3\right)\left(\frac{1}{x}-\alpha_4\right)\left(\frac{1}{x}-\alpha_5\right)\\&=(1-\alpha_1x)(1-\alpha_2x)(1-\alpha_3x)(1-\alpha_4x)(1-\alpha_5x)\\&=(-1)^5\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\left(x-\frac{1}{\alpha_1}\right)\left(x-\frac{1}{\alpha_2}\right)\left(x-\frac{1}{\alpha_3}\right)\left(x-\frac{1}{\alpha_4}\right)\left(x-\frac{1}{\alpha_5}\right)\end{aligned}$$

ולכן גם ל-Q יש 5 שורשים ממשיים (יש לשים לב ש-0 אינו שורש של P מכיוון ש-$P(0)=1$).

4. נתון פולינום מתוקן במקדמים **שלמים**, שכל שורשיו המרוכבים הם בתוך עיגול היחידה (ולא על השפה). מצאו את כל האפשרויות למקדם החופשי של הפולינום.

פתרון: יהא $P(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$ הפולינום שלנו ויהיו $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ השורשים (הלאו דווקא שונים) שלו. מתקיים $P(z)=(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)\cdots(z-\alpha_n)$ לכן

$$|a_0|=|P(0)|=|(-1)^n\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n|=|\alpha_1||\alpha_2|\cdots|\alpha_n|<1$$

מהנתון, a_0 הוא שלם ולכן $a_0=0$. אפשרות זו אכן קורית, למשל בפולינום $P(x)=x$.

הערה. להרחבה על הקשר בין מקדמי הפולינום לשורשיו, מוזמנים לקרוא על נוסחאות ויאטה.

5. יהא P פולינום ממעלה 100 שכל שורשיו שונים. האם יתכן שיש לו בדיוק 37 שורשים ממשיים?
פתרון: נסמן

$$P(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

מתקיים

$$P(\bar{z}) = \sum_{k=0}^{n} a_k \bar{z}^k = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k z^k} = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k z^k} = \overline{P(z)}$$

לכן, אם α הוא שורש של P, גם $\bar{\alpha}$ הוא שורש של P. בפרט, (לפולינום עם מקדמים ממשיים) כמות השורשים (כולל ריבוי) שאינם ממשיים, היא זוגית. לכן, לא יכול להיות של-P בדיוק 63 שורשים מרוכבים.

6. הוכיחו שניתן לפרק כל פולינום לגורמים ריבועיים ולינאריים אי-פריקים.
פתרון: יהא P פולינום ויהא α שורש של P. אם α ממשי, נוכל לכתוב $P(x) = (x-\alpha)Q(x)$. אם α מרוכב (שאינו ממשי), כמו בשאלה 5, גם $\bar{\alpha}$ הוא שורש של P ולכן נוכל לכתוב

$$P(x) = (x-\alpha)(x-\bar{\alpha})Q(x) = (x^2 - 2\mathbf{Re}(\alpha)x + |\alpha|^2)Q(x)$$

נוכל להמשיך בתהליך ובסופו ניצור פירוק של P לגורמים ריבועיים ולינאריים.
הערה. פולינום ריבועי ax^2+bx+c הוא אי-פריק אמ"מ $b^2 - 4ac < 0$ (תרגיל).

7. יהא $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ פולינום עם מקדמים **מרוכבים**, המקיים $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots$ וכן $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots$ שניהם ממשיים. נסמן את ב-$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ את שורשיו (הלאו דווקא שונים) של P. יהא $Q(x) = x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ פולינום ששורשיו הם $\alpha_1^2, \ldots, \alpha_n^2$. הוכיחו כי $b_0 + b_1 + b_2 + \cdots$ ממשי.
פתרון: מתקיים

$$P(x) = \prod_{k=1}^{n}(x-\alpha_k), \qquad Q(x) = \prod_{k=1}^{n}(x-\alpha_k^2)$$

לכן,

$$b_0 + b_1 + \cdots + b_{n-1} + 1 = Q(1) = \prod_{k=1}^{n}(1-\alpha_k^2) = \prod_{k=1}^{n}(1-\alpha_k)(1+\alpha_k)$$
$$= \prod_{k=1}^{n}(1-\alpha_k) \cdot (-1)^n \prod_{k=1}^{n}(-1-\alpha_k) = (-1)^n P(1)P(-1)$$

כעת, מתקיים

$$P(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = (a_0 + a_2 + \cdots) + (a_1 + a_3 + \cdots)$$
$$P(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots = (a_0 + a_2 + \cdots) - (a_1 + a_3 + \cdots)$$

ושניהם ממשיים לפי הנתון.

8. פרקו לגורמים אי-פריקים את הפולינום $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-120$.

פתרון: נסמן את הפולינום ב-P. נשים לב ש-$5!=120$, לכן $P(-6)=P(1)=0$ וניתן לרשום

$$P(x)=(x+6)(x-1)Q(x)$$

כאשר Q פולינום ממעלה 2. מתקיים

$$(x+3.5)(x-3.5)Q(x-2.5)=P(x-2.5)=(x-1.5)(x-0.5)(x+0.5)(x+1.5)-120$$

לכן $Q(x-2.5)$ סימטרי סביב 0, והוא מתוקן ממעלה 2, לכן הוא מהצורה $Q(x-2.5)=x^2+A$. מתקיים

$$Q(0)=\frac{P(0)}{(0+6)(0-1)}=\frac{-96}{-6}=16$$

לכן $A=Q(0)-2.5^2=9.75$, כלומר

$$Q(x)=(x+2.5)^2+9.75=x^2+5x+16$$
$$P(x)=(x+6)(x-1)(x^2+5x+16)$$

כרצוי.

הערה. $x^2+5x+16$ הוא אי-פריק, כי $5^2-4\cdot1\cdot16<0$.

9. חשבו את $\gcd\left(\overbrace{111\dots1}^{2025},\overbrace{111\dots1}^{5785}\right)$.

פתרון: מתקיים

$$\overbrace{111\dots1}^{n}=\frac{\overbrace{999\dots9}^{n}}{9}=\frac{10^n-1}{9}$$

לכן, עלינו לחשב את $\gcd(x^m-1,x^n-1)$ עבור $n>m$. נפעיל את אלגוריתם אוקלידס:

$$\gcd(x^m-1,x^n-1)=\gcd\left(x^m-1,(x^n-1)-x^{n-m}(x^m-1)\right)$$
$$=\gcd(x^m-1,x^{n-m}-1)$$

נמשיך בתהליך זה, ולבסוף נקבל $x^{\gcd(m,n)}-1$. לכן

$$\gcd\left(\overbrace{111\dots1}^{2025},\overbrace{111\dots1}^{5785}\right)=\gcd\left(\frac{10^{2025}-1}{9},\frac{10^{5785}-1}{9}\right)=\frac{1}{9}\left(10^{\gcd(2025,5785)}-1\right)$$
$$=\frac{1}{9}(10^5-1)=11111$$

10. האם הפולינום $x^{2025}+x^{200}+2x^{72}-5$ מתחלק בפולינום

א. x^7+x^3-2? **ב.** x^2+x+1? **ג.** x^3+x+3?

פתרון: נסמן $P(x)=x^{2025}+x^{200}+2x^{72}-5$ וכן ב-Q את הפולינום בכל סעיף.

א. נשים לב ש-1 שורש של Q, אבל $P(1)=-1\neq0$, לכן P לא מתחלק ב-Q.

ב. ניקח ω שורש של Q. נשים לב ש-$\omega^3=1$, לכן

$$P(\omega)=\omega^{2025}+\omega^{200}+2\omega^{72}-5=1+\omega^2+2-5=\omega^2-2\neq0$$

לכן P לא מתחלק ב-Q.

ג. מתקיים $Q(-2)<0$ וכן $Q(-1.2)>0$, לכן ל-Q קיים שורש $\alpha\in(-2,-1.2)$. מתקיים $1.2^4>2$, לכן עבור $x\geq1.2$ מתקיים

$$x^{2025}>1.2^{25}\cdot x^{2000}>2^6\cdot x^{2000}>x^{200}+2x^{72}$$

ובפרט לכל $x<-1.2$, $P(x)<0$, כלומר α אינו שורש של P. בפרט, P לא מתחלק ב-Q.

11. מצאו את כל הפולינומים המקיימים $P(xy) = P(x)P(y)$.

פתרון: נציב $y = 0$ ונקבל $P(0) = P(x)P(0)$, לכן $P(x) = 1$ או $P(0) = 0$. אם $P(0) = 0$, נוכל לכתוב $P(x) = xQ(x)$. כשנציב במשוואה, נקבל

$$xyQ(xy) = P(xy) = P(x)P(y) = xQ(x)yQ(y) \Longrightarrow Q(xy) = Q(x)Q(y)$$

וקיבלנו את המשוואה המקורית. נוכל לחזור על התהליך ונקבל $P(x) = x^n$ עבור $n \geq 0$. קל לוודא שפתרונות אלה מקיימים את המשוואה. בנוסף, ישנו הפתרון $P = 0$.

12. מצאו את כל הפולינומים המקיימים $xP(x-1) = (x-7)P(x)$.

פתרון: יהא α שורש של P. נציב $x = \alpha$ ונקבל

$$\alpha P(\alpha - 1) = (\alpha - 7)P(\alpha) = 0 \underset{\alpha \neq 0}{\Longrightarrow} P(\alpha - 1) = 0$$

וקיבלנו שאם $\alpha \neq 0$ שורש של P אז גם $\alpha - 1$ שורש של P. נציב $x = \alpha + 1$ ונקבל

$$0 = (\alpha + 1)P(\alpha) = (\alpha - 6)P(\alpha + 1) \underset{\alpha \neq 6}{\Longrightarrow} P(\alpha + 1) = 0$$

וקיבלנו שאם $\alpha \neq 6$ שורש של P אז גם $\alpha + 1$ שורש של P. לכן, (אם $P \neq 0$) מספר שאינו שלם לא יכול להיות שורש של P, כי אז ל-P יהיו אינסוף שורשים. באותו האופן, מספרים שלמים הקטנים מ-0 או גדולים מ-6 לא יכולים להיות שורשים של P. לכן, נוכל לכתוב את P באופן הבא:

$$P(x) = \prod_{k=0}^{6}(x-k)^{r_k}$$

כאשר $r_0, \dots, r_6$ שלמים, לאו דווקא חיוביים. נציב במשוואה המקורית:

$$x\prod_{k=1}^{7}(x-k)^{r_{k-1}} = xP(x-1) = (x-7)P(x) = (x-7)\prod_{k=0}^{6}(x-k)^{r_k}$$

הריבויים של כל אחד מהגורמים בשני הצדדים שווים. לפי השוואת הריבוי של x, נקבל $r_0 = 1$. לפי השוואת הריבוי של $x - k$ עבור $1 \leq k \leq 6$, נקבל $r_{k-1} = r_k$. לכן קיבלנו $r_0 = \cdots = r_6 = 1$, כלומר

$$P(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)$$

וקל לראות שפולינום זה אכן עובד. יחד עם $P = 0$, אלה הפתרונות היחידים.

13. מצאו את כל הפולינומים המקיימים $P\big(P(x)\big) + x = P(P(x) + x)$.

פתרון: עבור פולינום $R(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ נגדיר $\mathrm{Lm}\big(R(x)\big) = a_n x^n$ המונום המוביל. נסמן $\mathrm{Lm}\big(P(x)\big) = cx^n$. מתקיים

$$\mathrm{Lm}\Big(P(P(x) + x) - P\big(P(x)\big)\Big) = \mathrm{Lm}(c(P(x) + x)^n - cP(x)^n)$$
$$= \mathrm{Lm}(cP(x)^n + cnP(x)^{n-1}x - cP(x)^n) = \mathrm{Lm}(cnP(x)^{n-1}x)$$

לפי המשוואה $P(P(x) + x) - P\big(P(x)\big) = x$, לכן חייב להתקיים $n = 1$ וכן $c = 1$. כלומר, $P(x) = x + A$ וקל לוודא שכל A עובד.

14. מצאו את כל הזוגות של פולינומים מתוקנים (בעלי מקדם מוביל 1) P, Q המקיימים

$$P\big(P(x)\big) + Q\big(Q(x)\big) = P\big(Q(x)\big) + Q(P(x))$$

פתרון: נסמן $R = P - Q$. נניח בה"כ שהמקדם המוביל של R חיובי (אחרת נגדיר אותו בתור $Q - R$). נניח בשלילה ש-R אינו קבוע. מתקיים $R(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty$, לכן החל ממקום מסויים $R(x) > 0$ (לכן $P(x) > Q(x)$) וכן R מונוטוני החל ממקום מסויים. לכן $R\big(P(x)\big) > R\big(Q(x)\big)$ החל ממקום מסויים. נשים לב שהמשוואה שקולה ל-$R\big(P(x)\big) = R\big(Q(x)\big)$, סתירה.

לכן R קבוע, כלומר $P = Q + c$. קל לוודא שכל הפתרונות הללו מקיימים את המשוואה.

15. איילה כותבת מספר פולינומים מתוקנים ממעלה 2025, שכל מקדמיהם אי-שליליים. בכל מהלך ניתן לבחור שני פולינומים P, Q ולהחליפם בפולינומים מתוקנים P_1, Q_1 ממעלה 2025 המקיימים $P_1 + Q_1 = P + Q$ **<u>או</u>** $P_1 Q_1 = PQ$.

האם איילה יכולה לבחור פולינומים התחלתיים, כך שלאחר מספר סופי של מהלכים, נגיע למצב בו כל הפולינומים הרשומים על הלוח הם בעלי 2025 שורשים חיוביים שונים?

פתרון: יהא פולינום מתוקן

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = (x - \alpha_1)\cdots(x - \alpha_n)$$

אם נשווה את המקדם של x^{n-1} בשני הצדדים, נקבל $-a_{n-1} = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ (זו עוד דוגמה לנוסחאות ויאטה). כעת, נטען שסכום המקדמים של x^{2024} הוא אינווריאנט. אכן, אם $P_1 + Q_1 = P + Q$ סכום המקדמים של x^{2024} נשמר. אם $P_1 Q_1 = PQ$, קבוצת השורשים נותרת זהה, בפרט סכומם נותר זהה, בפרט המקדם של x^{2024} נשאר זהה.

מכיוון שהתחלנו עם מקדם של x^{2024} שהוא אי-שלילי, לא נוכל להגיע למצב בו הפולינומים הרשומים על הלוח הם בעלי 2025 שורשים חיוביים שונים, כי אז סכום שורשיהם יהיה חיובי והמקדם של x^{2024} יהיה שלילי.

16. יהא P פולינום המקיים $P(\sin\theta) = P(\cos\theta)$ לכל θ ממשי. הוכיחו כי קיים פולינום Q כך ש-$P(x) = Q(x^4 - x^2)$.

פתרון: מתקיים

$$P(-\sin\theta) = P(\sin(-\theta)) = P(\cos(-\theta)) = P(\cos\theta) = P(\sin\theta)$$

לכן P הוא פולינום זוגי ($P(x) = P(-x)$) ולכן ניתן לכתוב $P(x) = R(x^2)$. נציב במשוואה, נקבל

$$R(\sin^2\theta) = P(\sin\theta) = P(\cos\theta) = R(\cos^2\theta) = R(1 - \sin^2\theta)$$

לכן $R(x) = R(1 - x)$.

נחלק את R ב-$x(1-x)$ עם שארית, נקבל

$$R(x) = x(1-x)q(x) + r(x)$$

כאשר $\deg r < 2$. נציב $x \to 1 - x$, נקבל:

$$R(1-x) = (1-x)xq(1-x) + r(1-x)$$

ומתקיים $R(x) = R(1-x)$, לכן

$$x(1-x)\big(q(x) - q(1-x)\big) = r(1-x) - r(x)$$

מתקיים $\deg r < 2$, לכן המעלה של צד ימין היא לכל היותר 1, לכן המעלה של צד שמאל היא לכל היותר 1, אז חייב להתקיים $q(x) - q(1-x) = 0$, כלומר $q(x) = q(1-x)$. בנוסף, צד שמאל הוא 0, לכן גם צד ימין, כלומר $r(x) = r(1-x)$. אם r היה פולינום לינארי, המקדם המוביל של $r(x)$ ושל $r(1-x)$ היה שונה, לכן r הוא קבוע.

סה"כ קיבלנו שאם R פולינום המקיים $R(x) = R(1-x)$, מתקיים

$$R(x) = x(1-x)q(x) + r$$

עבור q המקיים $q(x)=q(1-x)$ ו-r קבוע. נוכל לחזור על התהליך עבור q ונחזור עליו פעמים רבות, ולבסוף נקבל $R(x)=Q\big(x(1-x)\big)$. סה"כ קיבלנו

$$P(x)=R(x^2)=Q\big(x^2(1-x^2)\big)=Q(x^2-x^4)$$

כרצוי.

17. נתונים פולינומים P,Q המקיימים $P(z)=0$ אמ"מ $Q(z)=0$ וכן $P(z)=1$ אמ"מ $Q(z)=1$. הוכיחו כי $P=Q$.

פתרון: נגדיר $R=P\cdot(P-1)$. נבחן כמה שורשים מרובים יכולים להיות ל-R. כמות השורשים היא $\deg(\gcd(R,R'))$. מתקיים

$$R'=P'\cdot(P-1)+P\cdot P'=P'\cdot(2P-1)$$

נשים לב ש-$P,2P-1$ וכן $P-1,2P-1$ זרים, לכן

$$\gcd(R,R')=\gcd\big(P(P-1),P'(2P-1)\big)=\gcd(P(P-1),P')$$

$$\deg(\gcd(R,R'))=\deg(\gcd(P(P-1),P'))\le\deg(P')=\deg(P)-1$$

לכן ל-R יכולים להיות לכל היותר $\deg(P)-1$ שורשים מרובים, לכן יש ל-R לפחות

$$\deg R-(\deg(P)-1)=\deg(P)+1$$

שורשים שונים. אז P שווה ל-0 או ל-1 בלפחות $\deg(P)+1$ נקודות שונות.

באותו אופן, Q שווה ל-0 או ל-1 בלפחות $\deg(Q)+1$ נקודות שונות. לכן, נקבל ש-$P-Q$ מתאפס בלפחות

$$\max(\deg(P)+1,\deg(Q)+1)=\deg(P-Q)+1$$

נקודות שונות, לכן $P-Q=0$ ולכן $P=Q$.

18. יהיו P,Q,R פולינומים זרים בזוגות ולא קבועים, ויהא $n\ge 3$. הוכיחו כי $P^n+Q^n\neq R^n$.

פתרון: אם $p|n$, אז $\left(P^{\frac{n}{p}},Q^{\frac{n}{p}},R^{\frac{n}{p}},p\right)$ פתרון, לכן נוכל להניח כי $n=p$ ראשוני.

נניח כי מתקיים $P^p+Q^p=R^p$ ו-R הוא בעל המעלה המינימלית עבור דוגמה כזו. אז

$$P^p=R^p-Q^p=\prod_{k=0}^{p-1}\big(R-\zeta_p^kQ\big)$$

כאשר ζ_p הוא שורש יחידה פרימיטיבי מסדר p. מתקיים

$$\gcd\big(R-\zeta_p^{k_1}Q,R-\zeta_p^{k_2}Q\big)=\gcd\left(\big(\zeta_p^{k_1}-\zeta_p^{k_2}\big)Q,R-\zeta_p^{k_2}Q\right)=\gcd\big(Q,R-\zeta_p^{k_2}Q\big)$$
$$=\gcd(Q,R)=1$$

לכן הגורמים במכפלה הימנית זרים זה לזה, ולכן כולם חזקות p-יות. נגדיר

$$P_1^p=-\zeta_p(R-Q),\ \ Q_1^p=\big(1+\zeta_p\big)\big(R-\zeta_pQ\big),\ \ R_1^p=R-\zeta_p^2Q$$

מתקיים $P_1^p+Q_1^p=R_1^p$ וכן P_1,Q_1,R_1 שלושתם ממעלות הקטנות מהמעלות של P,Q,R, וזו סתירה.

הערה 1. עלול להתקיים שאחד מבין P_1,Q_1,R_1 הוא פולינום קבוע. במקרה זה נחליף אותו בפולינום $\alpha\big(R-\zeta_p^3Q\big)$ עבור α מתאים כך שתתקיים המשוואה (אבל, בדרך זו מדלגים על $p=3$ ויש להוכיחו בדרך אחרת).
לחלופין, הקורא העקשן מוזמן לעקוב אחר ההוכחה ולהגיע לסתירה במקרה בו אחד הפולינומים הללו קבוע.

הערה 2. למרות ש-4 אינו ראשוני, ההוכחה עובדת באופן דומה גם עבור $p=4$. הפרטים מושארים כתרגיל לקורא.