חברותומס

1. מצאו את כל המספרים הדו ספרתיים N כך שברישום העשרוני של N^2, המספר N מופיע בצד ימין.

2. פתרו בטבעיים: $3^a - 2^b = 1$

3. האם קיים N טבעי כך ש-$\frac{N}{2}$ ריבוע שלם, $\frac{N}{3}$ חזקה שלישית, ו-$\frac{N}{5}$ חזקה חמישית?

4. יהי $p = 4k + 3$ מספר ראשוני. נסמן:

$$M = 1^1 \cdot 2^2 \cdots (p-1)^{p-1}$$

הוכיחו שאחד מבין המספרים $M - 1,\ M + 1$ מתחלקים ב- p.

5. מצאו את כל הפונקציות $f: N \to N$ עבורן לכל n טבעי מתקיים:

$$f(n) \cdot f\big(f(n)\big) = n^2$$

6. האם קיים מספר פריק N ככה שסכומי הספרות של d המחלקים הטבעיים שלו הם $1,2,\dots,d$ בסדר כלשהו?

7. מצאו את כל הטבעיים n עבורם $n!$ הוא ריבוע שלם.

8. עבור n שלם חיובי, נסמן ב-$f_2(n)$ את כמות המחלקים של n שהם ריבוע שלם, וב-$f_3(n)$ את כמות המחלקים של n שהם קוביה שלמה. הוכיחו שלכל טבעי k קיים n עבורו $f_2(n) = k \cdot f_3(n)$.

9. מצאו את כל השלמים החיוביים a, b, c, x המקיימים את המשוואה $5^a + 3^b \cdot 4^c = x^2$.

10. נסמן ב-$S_k(n)$ את סכום הספרות של n כשרושמים אותו בבסיס k. מצאו את ה- n הטבעי המינימלי עבורו $S_{27}(n) + S_{27}(3n) + S_{27}(9n) = S_8(n) + S_8(2n) + S_8(4n)$.

11. מצאו מספר תלת-ספרתי n המקיים $n^2 \mid 4^n - 1$.