8/9/2025 **מחנה ספטמבר** ט"ו באלול תשפ"ה

קבוצת ירדן

1. תחרות המועמדים היא טורניר שחמט עם n משתתפים. כל זוג מתחרים משחקים זה עם זה שני משחקים, פעם אחת הראשון לבן ובפעם השנייה הצבעים הפוכים.
התברר שכל שחקן סיים לכל היותר שני משחקים בתיקו, פעם אחת כאשר שיחק בלבן ופעם אחת כאשר שיחק בשחור. ידוע שלכל מתחרה, כמות הפעמים שניצח בלבן שווה לכמות הפעמים שהפסיד בלבן, וכך גם כמות הפעמים שניצח בשחור שווה לכמות הפעמים שהפסיד בשחור.

מצאו את כל ה-n עבורם ניתן לטעון בוודאות שקיימים שני שחקנים, שאחד מהם ניצח את השני בשני המשחקים ששיחקו.

2. מצאו את כל הפונקציות $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ עבורן לכל $m,n,k\in\mathbb{N}$ מתקיים:
$$m+n+k \mid f(m)+f(n)+f(k).$$
הערה: $\mathbb{N}$ זו קבוצת השלמים החיוביים.

3. נתון משולש חד זוויות ABC שחסום במעגל Ω, ונתונים שלושה אורכים x,y,z שמקיימים:
$$x+y=AB, \qquad z+x=CA, \qquad y+z=BC.$$
על המעגל Ω נתונות 6 נקודות U_1,U_2,V_1,V_2,W_1,W_2 כך שמתקיים:
$$AU_1=AU_2=x, \qquad BV_1=BV_2=y, \qquad CW_1=CW_2=z.$$
הוכיחו שהמעגל החסום במשולש ABC והמעגל החסום במשולש שנוצר מהישרים U_1U_2,V_1V_2,W_1W_2, חולקים מרכז משותף.

4. נתונים $a\geq 0, b\geq 0, c\geq 0$ עבורם $a+b+c=3$. הוכיחו כי
$$2abc+\sum_{cyc}\frac{a}{2bc+1}\leq 3$$

בהצלחה!

8/9/2025 **מחנה ספטמבר** ט"ו באלול תשפ"ה

קבוצת רותם

1. נתונים $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ עבורם $a+b+c=3$. הוכיחו כי

$$2abc + \sum_{cyc} \frac{a}{2bc+1} \leq 3$$

2. נתון משולש ABC החסום במעגל Ω. תהי A' על Ω כך ש-$AA' || BC$. יהיו I, I_A מרכזי המעגלים החסומים בתוך המשולש ומחוץ לקודקוד A. תהי M אמצע הצלע BC. נסמן ב-D את נקודת החיתוך השנייה של $A'M$ עם Ω. השיקוף של M ביחס ל-A' יסומן M'. הוכיחו כי IDI_AM' חסום במעגל.

3. יהי גרף G. בכל דקה ניתן לבצע עליו את אחת משתי הפעולות הבאות:

- להוסיף קודקוד ולחבר אותו בקשתות עם כל הקודקודים הישנים.
- לבחור שלושה קודקודים $u, v, w \in G$ כך שלוש הקשתות המחברות ביניהם קיימות, ולהוריד את שלוש הקשתות הנ"ל מהגרף.

עבור אילו גרפים התחלתיים G בהם יש קודקוד שמחובר לכל שאר הקודקודים, ניתן לבצע סדרה של פעולות חוקיות ולהגיע לגרף הריק?

בהצלחה!

9/9/2025 **מחנה ספטמבר** ט"ז באלול תשפ"ה

תחרות קבוצתית

1. על הלוח רשום זוג המספרים $(12;20)$. בכל מהלך גבי יכול להחליף את הזוג $(p;q)$ באחד מבין שני הזוגות: $(2p;4q)$ או $(p+2;q+p+1)$.

א. האם כעבור מספר מהלכים, גבי יכול להגיע לזוג $(3{,}000;2{,}000{,}000)$?

ב. האם כעבור מספר מהלכים, גבי יכול להגיע לזוג $(2016;1{,}016{,}000)$?

2. יהי n שלם חיובי. הוכיחו כי קיימים אינסוף מספרים שלמים חיוביים m עבורם בדיוק n מבין המספרים $\{m+1, m+2, \dots, m+n^2\}$ ניתנים להצגה בתור a^2+b^3 עבור a,b שלמים חיוביים.

3. נתון מחומש משוכלל $A_1A_2A_3A_4A_5$ שמרכזו O. דרך O עובר ישר שחותך את הישרים $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_5A_1$ בנקודות $B_1, B_2, \dots, B_5$ בהתאמה. נסמן ב-d_i את אורך הקטע OB_i. הוכיחו כי ניתן לבחור סימנים בביטויים הבאים:

$$\pm\frac{1}{d_1}\pm\frac{1}{d_2}\pm\frac{1}{d_3}\pm\frac{1}{d_4}\pm\frac{1}{d_5}$$

$$\pm d_1d_2 \pm d_2d_3 \pm d_3d_4 \pm d_4d_5 \pm d_5d_1$$

$$\pm d_1d_3 \pm d_2d_4 \pm d_3d_5 \pm d_4d_1 \pm d_5d_2$$

כך שהערך של כל ביטוי יצא 0.

4. איילה בוחרת גרף קשיר סודי בעל n קודקודים ובעל $m>6$ קשתות שממוספרות $1,\dots,m$, ומגלה לברווז מהו m. לאחר מכן, ברווז מנסה לגלות את הגרף הסודי, כאשר מותר לו לבחור תתי-קבוצות של $1,\dots,m$ ולשאול האם הקשתות בכל תת-קבוצה מהוות תת-גרף קשיר (קודקודי תת-הגרף שהקשתות מגדירות הם קבוצת הקודקודים שבקצוות הקשתות). האם בהכרח, לאחר מספר כלשהו של שאלות, ברווז יוכל לבנות את הגרף הסודי? כלומר להבין מהו n ולבנות גרף עם n קודקודים שממוספרים $1,2,\dots,n$, ככה שיהיה קיים מספור של הקודקודים בגרף הסודי, והגרפים יהיו זהים?

5. מצאו את כל המספרים הרציונליים שניתן לייצג כסכום של שברים שונים מהצורה $\frac{1}{n}$ כאשר n שלם חיובי חסר ריבועים.

6. יהי $0<c<1$ ממשי. מצאו את המספר k הגדול ביותר (כתלות ב-c) עבורו לכל $n\geq 3$ טבעי ולכל $x_1,\dots,x_n$ ממשיים כך ש-$x_1^2+\cdots+x_n^2=1$ ובנוסף מקיימים

$$x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n+x_nx_1\geq c,$$

בהכרח מתקיים ש-

$$x_1x_3+x_2x_4+\cdots+x_{n-1}x_1+x_nx_2\geq k.$$

7. משולש ABC חוסם מעגל ω שמרכזו I. המעגל BIC נחתך עם ω בנקודות X,Y. השיקוף של X ביחס ל-AC יסומן ב-X'. נקודת החיתוך של $X'Y$ עם AC תסומן P. תהי G נקודת ז'רגון במשולש ABC. הוכיחו כי $PG\perp AI$.

הערה: נקודת ז'רגון היא נקודת המפגש של הצ'ביאנות שמחברות את הקודקודים לנקודות ההשקה של המעגל החסום במשולש.

בהצלחה!