כ' בסיוון **מחנה יוני** **16.6.25**

מבחן ירדן

1. מצאו את כל הפתרונות הממשיים של המשוואה:

$$110x = 21 - \frac{110}{21 - \frac{110}{21 - \frac{110}{21 - \frac{1}{x}}}}$$

2. נתונים שלמים חיוביים a, b, c, d כך ש-d קטן מ-a, b, c ומתקיים

$$ab + bc + ca + d^2 | (a + b)(b + c)(c + a)$$

האם יתכן שקיימים ראשונים, לא בהכרח שונים p, q כך ש-$ab + bc + ca + d^2 = pq$?

3. על הצלעות BC, AC, AB של משולש ABC נבחרו נקודות D, E, F בהתאמה כך שמרובעים $ABDE, ACDF$ חסומים. יהיו X, Y נקודות על המעגלים ABD, ACD בהתאמה, כך ש-X, A, Y נמצאות על ישר. המעגל החוסם של DEF נחתך שנית עם הצלעות AB, AC בנקודות P, Q בהתאמה. הוכיחו כי XP, YQ נחתכים על המעגל החוסם של DEF.

4.

בהצלחה!

כא' בסיוון **מחנה יוני** **17.6.25**

תחרות קבוצתית

1. מצאו את כל הפונקציות $f:\mathbb{Z}_{>0}\to\mathbb{Z}_{>0}$ המקיימות לכל $x,y\in\mathbb{Z}_{>0}$
$$\gcd\left(f(x),f(y)\right)^2=f\left(f\left(x+y\right)\right).$$

2. במשושה קמור ABCDEF מתקיים
$$\begin{cases}\measuredangle\mathrm{EAC}+\measuredangle\mathrm{EDC}<\pi\\ \measuredangle\mathrm{BDF}+\measuredangle\mathrm{BAF}<\pi\\ \measuredangle\mathrm{DFB}+\measuredangle\mathrm{DCB}<\pi\\ \measuredangle\mathrm{FBD}+\measuredangle\mathrm{FED}<\pi\end{cases}$$
הראו כי $\measuredangle\mathrm{ACE}+\measuredangle\mathrm{AFE}>\pi$.

3. נתון $k\geq 1$ טבעי, מצאו את לוח המשבצות המלבני בעל השטח המינימלי שיש לו צביעה ב-k^2 צבעים, כך שלכל t בין 1 ל-k^2 קיים ריבוע $k\times k$ בלוח שמכיל בדיוק t צבעים שונים?

4. נסמן ב-$s_2(n)$ את סכום הספרות של n ברישום בינארי. הוכיחו כי
$$\sum_{i=0}^{2^n-1}\frac{(-1)^{s_2(i)}}{i+1}>0$$

5. נתון משולש ABC, עם מעגל חוסם Ω ומעגל חסום ω. המרכז של ω הוא I, ונקודת ההשקה שלו עם BC היא D. הישרים BI ו-CI פוגשים את Ω שנית בנקודות S_B ו-S_C בהתאמה. נתון כי קיימת נקודה נוספת S על Ω כך שהקטעים SS_B ו-SS_C משיקים ל-ω. הקטעים SS_B ו-SS_C חותכים את הצלע BC בנקודות P ו-Q בהתאמה. הקטע S_BS_C פוגש את הצלעות AB ו-AC בנקודות W ו-V בהתאמה. הראו כי AD, PW ו-VQ נפגשים בנקודה.

6. נתון n טבעי ומספרים חיוביים $a_1,\ldots,a_n;\ b_1,\ldots,b_n$ כך ש: $a_i^2+b_i^2=1$ לכל i. הוכיחו כי
$$\sum_{1\leq i<j\leq n}a_ib_j\ +\ \frac{1}{2}\sum_{1\leq i\leq n}a_ib_i\leq\frac{n^2}{3}$$

7. נתון מספר p ראשוני אי-זוגי. במעגל רשומים המספרים $a_1,a_2,\ldots,a_p$. בכל מהלך דני בוחר מספר k כך ש-$1\leq k\leq p-1$ ומחליף את $a_1,a_2,\ldots,a_p$ במספרים $a_1-a_{k+1},a_2-a_{k+2},\ldots,a_p-a_k$. איילה טוענת, בלי שהיא ראתה את המצב ההתחלתי, ובלי שהיא יודעת איזה k דני יבחר בכל מהלך, שלאחר n מהלכים כל המספרים במעגל יתחלקו ב-m. מצאו את כל הזוגות (m,n) כך שאיילה צודקת.

בהצלחה!