4.5.25 **מחנה מאי** **ו' באייר**

מבחן רותם

1. נתון משולש שווה שוקיים ABC, $AB = AC$. תהי D נקודה על הצלע AC. נתונה נקודה L בתוך המשולש המקיימת ש-$\angle CLD = 90°$ וגם $CL \cdot BD = BL \cdot CD$. הוכיחו כי מרכז המעגל החוסם של BDL נמצא על AB.

2. עבור גרף G שהקודקודים שלו צבועים ב-k צבעים באופן חוקי, נגיד שקודקוד v הוא יציב אם לא ניתן לשנות את הצבע שלו לאחד מ-$k-1$ הצבעים האחרים, מבלי להרוס את החוקיות של הצביעה.

נתון גרף 2024 – רגולרי בלי משולשים ומרובעים. הוכיחו כי ניתן לצבוע אותו ב-2025 צבעים כך שיהיו לפחות 1012 קודקודים יציבים מצבעים שונים.

<u>הערה:</u> צביעת קודקודים של גרף נקראת חוקית אם כל שני קודקודים שכנים צבועים בצבעים שונים.

בהצלחה!

5.5.24 **מחנה מאי** **ז' באייר**

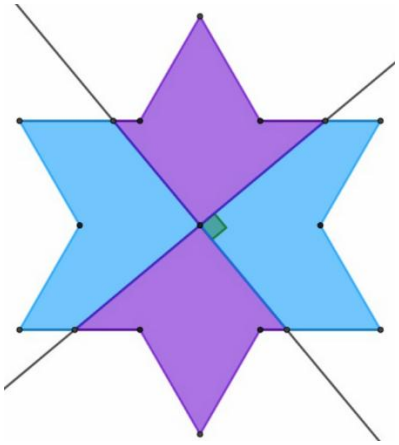
מבחן ירדן

1. מצאו את כמות המספרים שברישום העשרוני שלהם יש לכל היותר n ספרות שלא מכילים רצף ארוך מ-1 של ספרות שמהווה פלינדרום.
<u>הערה:</u> פלידרום הוא מספר שאם רושמים את ספרותיו משמאל לימין או מימין לשמאל מקבלים אותו דבר.

2. מצאו את כל הפולינומים P במקדמים ממשיים המקיימים

$$P(x+y, x-y) = 2P(x,y)$$

לכל x, y ממשיים.



3. נתון מגן דוד משוכלל, כלומר איחוד של שני משולשים משוכללים חופפים בעלי מרכז משותף, הסימטריים ביחס למרכז. דרך המרכז עוברים שני ישרים מאונכים ומחלקים את מגן הדוד לארבעה חלקים. החלקים נצבעו בכחול ובסגול לסירוגין כך שבדיוק שתי פינות של מגן הדוד סגולות והארבע האחרות כחולות.

מה גדול יותר, השטח הסגול או הכחול?

4. מצאו את כל השלמים החיוביים n עבורם קיים ראשוני p ושלמים חיוביים a, b כך שמתקיים: $p^n = 2^a + b^2$.

בהצלחה!

6.5.2025 **מחנה מאי** **ח' באייר ה'תשפ"ה**

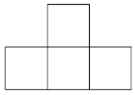
מבחן ירדן

1. יהא ABC משולש. נסמן ב-D, E, F את עקבי הגבהים מ-A, B, C בהתאמה, וב-H את מפגש הגבהים. תהא X נקודה כך ש-$ABCX$ טרפז שווה שוקיים $(AX||BC)$.
הוכיחו כי המעגל החוסם של משולש DEF, המעגל החוסם של משולש ADX והישר HX נחתכים בנקודה אחת.

2. הוכיחו כי לכל $a_1, a_2, \dots, a_n$ ממשיים חיוביים, מתקיים:

$$(a_1^2 + a_2^2)(a_2^2 + a_3^2) \cdots (a_{n-1}^2 + a_n^2)(a_n^2 + a_1^2) \\ \geq (a_1^2 + a_n a_2)(a_2^2 + a_1 a_3) \cdots (a_n^2 + a_{n-1} a_1)$$

3. נתון לוח משבצות $N \times N$. טווס רוצה להציב חלקים בצורת T-טטרומינו על הלוח, כך שלכל טטרומינו תהיה לפחות משבצת אחת שרק הוא מכסה אותה.
נסמן ב-$f(N)$ את הכמות המקסימלית של T-טטרומינואים שטווס יכול להכניס ללוח. מצאו את הקבוע C הגדול ביותר עבורו $f(N) \leq CN^2$ לכל N.

הערה. T-טטרומינו הוא הצורה הבאה:  , מותר לסובב את הצורה.

4. יהא p ראשוני המקיים $p \equiv 3 \bmod 4$. הוכיחו כי קיימים שלמים שונים בזוגות $1 \leq a_1, a_2, \dots, a_{\frac{p-1}{2}} \leq p-1$ עבורם מתקיים:

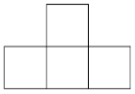
$$\prod_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\frac{p-1}{2}} (a_i + a_j) \equiv 1 \mod p$$

בהצלחה!

6.5.2025 **מחנה מאי** **ח' באייר ה'תשפ"ה**

מבחן רותם

1. נתון לוח משבצות $N \times N$. טווס רוצה להציב חלקים בצורת T-טטרומינו על הלוח, כך שלכל טטרומינו תהיה לפחות משבצת אחת שרק הוא מכסה אותה. נסמן ב-$f(N)$ את הכמות המקסימלית של T-טטרומינואים שטווס יכול להכניס ללוח. מצאו את הקבוע C הגדול ביותר עבורו $f(N) \leq CN^2$ לכל N.

הערה. T-טטרומינו הוא הצורה הבאה:  , מותר לסובב את הצורה.

2. יהא p ראשוני המקיים $p \equiv 3 \bmod 4$ או $p \equiv 5 \bmod 8$. הוכיחו כי קיימים שלמים שונים בזוגות $1 \leq a_1, a_2, \ldots, a_{\frac{p-1}{2}} \leq p-1$ עבורם מתקיים:

$$\prod_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{\frac{p-1}{2}} (a_i + a_j) \equiv 1 \mod p$$