אלגברה לינארית בסיסית

בהרצאה זו אלמד אתכם את הידע הבסיסי שעליכם לדעת על שדות ומרחבים וקטורים על מנת להבין את הרצאת הערב שלי. בהרבה מקומות אני אפשט, או לא אתן את ההגדרה הכי כללית. להרחבה, מוזמנים לקרוא רשימות מסודרות לקורס אלגברה לינארית 1. אני אוהב את אלה.

הגדרה פשטנית לשדה

הגדרה: קבוצה $F \subseteq \mathbb{C}$ תיקרא **שדה** אם $0,1 \in F$ וכן היא סגורה תחת 4 פעולות החשבון. כלומר, אם $a, b \in F$ אז גם $a+b, a-b, a \cdot b, \frac{a}{b} \in F$ (כמובן, בהינתן שניתן לחלק ב-b, כלומר ש-$b \neq 0$).

אין זו ההגדרה הכללית ביותר. עם זאת, בהרצאה, כל השדות יהיו מוכלים ב-$\mathbb{C}$, וזו אכן ההגדרה הכללית ביותר לשדה המוכל ב-$\mathbb{C}$.

דוגמאות: הקבוצות $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ הן שדות.

תרגיל: יהא $d \in \mathbb{Q}$ כך ש-$\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$. הקבוצה הבאה היא שדה

$$\mathbb{Q}(\sqrt{d}) = \{a + b\sqrt{d} : a, b \in \mathbb{Q}\}$$

פתרון: ברור ש-$0,1 \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$. עלינו לוודא כי $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ סגור תחת ארבע פעולות החשבון.

- חיבור וחיסור:

$$(a_1 + b_1\sqrt{d}) \pm (a_2 + b_2\sqrt{d}) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)\sqrt{d} \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$$

- כפל:

$$(a_1 + b_1\sqrt{d})(a_2 + b_2\sqrt{d}) = a_1a_2 + b_1b_2d + (a_1b_2 + b_1a_2)\sqrt{d} \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$$

- חילוק:

$$\frac{a_1 + b_1\sqrt{d}}{a_2 + b_2\sqrt{d}} = \frac{(a_1 + b_1\sqrt{d})(a_2 - b_2\sqrt{d})}{(a_2 + b_2\sqrt{d})(a_2 - b_2\sqrt{d})} = \frac{\overbrace{(a_1 + b_1\sqrt{d})}^{\in\mathbb{Q}(\sqrt{d})}\overbrace{(a_2 - b_2\sqrt{d})}^{\in\mathbb{Q}(\sqrt{d})}}{\underbrace{a_2^2 - b_2^2 d}_{\in\mathbb{Q}}} \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$$

ואכן וידאנו את כל התנאים. ■

תרגיל: כל שדה $F \subseteq \mathbb{C}$ מקיים $\mathbb{Q} \subseteq F$.

פתרון: נשים לב ש-F סגור לחיבור וחיסור, ו-$0,1 \in F$, לכן $\mathbb{Z} \subseteq F$. כעת, F סגור לחילוק, לכן גם כל מספר רציונלי הוא ב-F, כלומר $\mathbb{Q} \subseteq F$. ■

הגדרה: יהא F שדה. תת-קבוצה $F' \subseteq F$ נקראת **תת-שדה** של F אם F' בעצמה היא שדה.

תרגיל: יהא F שדה. $F' \subseteq F$ הוא תת-שדה אמ"מ $0,1 \in F'$ וכן היא סגורה תחת 4 פעולות החשבון.

פתרון: ברור. ■

מרחבים וקטוריים

יהא F שדה. נקרא לאיבר בשדה F **סקאלר**.

מוטיבציה: נסתכל על וקטורים דו-מימדיים ממשיים. נסמן $V = \mathbb{R}^2$ ו-$F = \mathbb{R}$.
נשים לב שניתן **לחבר וקטורים**. כלומר, לכל $v_1, v_2 \in V$ ישנו וקטור $v_1 + v_2 \in V$.
בנוסף, נשים לב שניתן **לכפול בסקאלר**. כלומר, לכל $v \in V$ ולכל $\alpha \in F$, ישנו וקטור $\alpha v \in V$.
החיבור והכפל הללו מקיימים כמה תכונות מוכרות. יהיו $u, v, w \in V$ ו-$a, b \in F$.

1. אסוציטיביות החיבור: $(u + v) + w = u + (v + w)$.
2. קיום איבר אפס: ישנו וקטור $\vec{0} \in V$ המקיים $\vec{0} + v = v + \vec{0} = v$.
3. קיום איבר נגדי: קיים $-v \in V$ המקיים $-v + v = v + (-v) = \vec{0}$.
4. קומוטטיביות החיבור: $u + v = v + u$.
5. אסוציטיביות כפל בסקאלר: $(ab)v = a(bv)$.
6. $1v = v$.
7. חוג הפילוג הוקטורי: $a(u + v) = au + av$.
8. חוק הפילוג הסקאלרי: $(a + b)v = av + bv$.

הגדרה: קבוצה V עם פעולות חיבור וכפל בסקאלר המקיימת את תכונות 1-8 נקראת **מרחב וקטורי** מעל F.

דוגמאות: יהא F שדה. המרחבים הבאים הם מרחבים וקטוריים מעל F:

1. F^n, עם פעולות החיבור וכפל בסקאלר הסטנדרטיות.
2. מקרה פרטי של 1: F הוא מרחב וקטורי מעל עצמו.
3. $F = \mathbb{R}$. וקטורים בתור חיצים.
4. $F[x]$ – פולינומים עם מקדמים ב-F.
5. $F = \mathbb{R}$. אוסף כל הפונקציות הממשיות הרציפות על הקטע $[0,1]$.
6. אוסף כל המשוואות הלינאריות ב-n משתנים, כשהמקדמים והמשתנים הם ב-F.
7. $\{\vec{0}\}$.
8. יהא $F \subseteq F'$ תת-שדה. אז F הוא מרחב וקטורי מעל F'. לדוגמה: $\mathbb{R}$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{Q}$ ו-$\mathbb{C}$ הוא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$ וגם מעל $\mathbb{Q}$.

תכונות בסיסיות: יהא V מרחב וקטורי מעל F.

1. וקטור האפס $\vec{0} \in V$ הוא יחיד.
2. נגדי של איבר הוא יחיד.
3. $0v = \vec{0}$ לכל $v \in V$.
4. $a\vec{0} = \vec{0}$ לכל $a \in F$.
5. אם $av = \vec{0}$ אז $a = 0$ או $v = \vec{0}$.
6. $(-a)v = a(-v) = -(av)$.

הגדרה: תת-קבוצה $U \subseteq V$ נקראת **תת-מרחב** של V אם $\vec{0} \in U$, U סגורה לחיבור ו-U סגורה לכפל בסקאלר.
נשים לב ש-U הוא בעצמו מרחב וקטורי ביחס לאותן פעולות.

צירופים לינאריים

יהא F שדה, V מרחב וקטורי מעל F.

מינוח: וקטור $v \in V$ יקרא צירוף לינארי של $v_1, v_2, \dots, v_k \in V$ אם קיימים $a_1, a_2, \dots, a_k \in F$ כך ש-

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_k v_k = v$$

אוסף כל הצירופים הלינאריים של $v_1, v_2, \dots, v_k$ יסומן $\mathrm{Span}(v_1, v_2, \dots, v_k)$.

דוגמאות

1. $(1,2,3) \in \mathrm{Span}\big((1,1,1),(0,1,2)\big)$ אבל $(1,0,0) \notin \mathrm{Span}\big((1,1,1),(0,1,2)\big)$.
2. אם v וקטור ב-$\mathbb{R}^3$, אז $\mathrm{Span}(v)$ הוא הישר דרך הראשית שמכיל את v.
3. אם u, v וקטורים ב-$\mathbb{R}^3$, אז $\mathrm{Span}(u, v)$ הוא המישור דרך הראשית שמכיל את u, v.

הבחנה: $U = \mathrm{Span}(v_1, v_2, \dots, v_k)$ הוא התת-מרחב המינימלי שמכיל את $v_1, v_2, \dots, v_k$. כלומר, $U \subseteq V$ תת-מרחב, מתקיים $v_1, v_2, \dots, v_k \in U$ ואם $v_1, v_2, \dots, v_k \in W$ כאשר W הוא תת-מרחב, אז $U \subseteq W$.

הגדרה: נגיד ש-$v_1, \dots, v_n \in V$ **פורשת** את V אם $\mathrm{Span}(v_1, v_2, \dots, v_k) = V$, כלומר כל איבר ב-$V$ הוא צירוף לינארי של $v_1, v_2, \dots, v_k$.

דוגמה: נסמן $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in F^n$ הוקטור שכולו 0 מלבד 1 בקואורדינאטה ה-i. אז $e_1, \dots, e_n$ פורשת את F^n.

אי-תלות לינארית

הגדרה: סדרה $v_1, \dots, v_n \in V$ נקראת **תלויה לינארית מעל** F אם קיימים $a_1, a_2, \dots, a_n \in F$ לא כולם 0 כך ש-$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n = 0$.

סדרה $v_1, \dots, v_n \in V$ נקראת בלתי-תלויה לינארית (בת"ל) מעל F אם היא אינה תלויה לינארית. באופן שקול,

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n = 0 \Leftrightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$$

דוגמאות

1. $\binom{2}{2}, \binom{3}{3} \in F$ תלוייה לינארית כי $2\binom{3}{3} - 3\binom{2}{2} = 0$.
2. $e_1, \dots, e_n \in F^n$ היא בלתי-תלוייה לינארית.
3. $\emptyset$ היא בלתי-תלוייה לינארית.
4. $\{v\}$ תלוייה לינארית אמ"מ $v = 0$.
5. $\{u, v\}$ תלוייה לינארית אמ"מ v הוא כפולה של u.

תרגיל: סדרה $v_1, \dots, v_n \in V$ תלוייה לינארית אמ"מ קיים i עבורו $v_i \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_{i-1})$.

פתרון: ($\Longrightarrow$) אם $v_i \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_{i-1})$ אז $v_1, \dots, v_{i-1}, v_i$ תלוייה לינארית ואז גם $v_1, \dots, v_n$.

($\Longleftarrow$) נניח $v_1, \dots, v_n \in V$ תלוייה לינארית. קיימים $a_1, \dots, a_n \in F$ לא כולם 0 כך ש-

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n = 0$$

ניקח את ה-i המקסימלי עבורו $a_i \neq 0$. אז

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_i v_i = 0 \Rightarrow v_i \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_{i-1})$$

כרצוי. ■

הערה: תת-סדרה של סדרה בת"ל היא בעצמה בת"ל.

בסיסים ומימד

טענה: תהא $v_1, \dots, v_n \in V$ סדרה הפורשת את V ותהא $u_1, \dots, u_m \in V$ סדרה בת"ל. אז $m \leq n$ וניתן להחליף m איברים מתוך $v_1, \dots, v_n$ ב-$u_1, \dots, u_m$ כך שהסדרה המתקבלת פורשת את V.

הוכחה: באינדוקציה על m. בסיס, $m = 0$, ברור. כעת, נניח כי $m \geq 1$ ונניח שהטענה נכונה עבור $m - 1$. לפי הנחת האינדוקציה, ולאחר סידור מחדש של הסדרה, נקבל $u_1, \dots, u_{m-1}, v_m, \dots, v_n$ פורשת את V. מתקיים

$$u_m \in \mathrm{Span}(u_1, \dots, u_{m-1}, v_m, \dots, v_n), \qquad u_m \notin \mathrm{Span}(u_1, \dots, u_{m-1})$$

לכן נוכל לכתוב

$$u_m = b_1 u_1 + \cdots + b_{m-1} u_{m-1} + a_m v_m + \cdots + a_n v_n$$

כאשר $a_m, \dots, a_n$ לא כולם 0. בה"כ $a_m \neq 0$ ואז

$$\begin{gathered} v_m = a_m^{-1}(-b_1 u_1 - \cdots - b_{m-1} u_{m-1} + u_m - a_{m+1} v_{m+1} - \cdots - a_n v_n) \\ \in \mathrm{Span}(u_1, \dots, u_m, v_{m+1}, \dots, v_n) \\ \mathrm{Span}(u_1, \dots, u_m, v_{m+1}, \dots, v_n) = \mathrm{Span}(u_1, \dots, u_m, v_{m+1}, \dots, v_n, v_m) \\ \supseteq \mathrm{Span}(u_1, \dots, u_{m-1}, v_m, \dots, v_n) = V \end{gathered}$$

ואכן $u_1, \dots, u_m, v_{m+1}, \dots, v_n$ פורשת. ■

הגדרה: סדרה $v_1, \dots, v_n \in V$ נקראת **בסיס** של V אם היא בת"ל ופורשת את V.

הערה: בסיס יכול להיות אינסופי, אבל צירוף לינארי הוא תמיד סכום סופי. אם יש למרחב בסיס סופי, הוא נקרא **נוצר סופית**.

הבחנה: לכל הבסיסים יש אותו הגודל. גודל זה נקרא **המימד** של V ומסומן $\dim V$.

דוגמאות

1. $e_1, \dots, e_n$ הוא בסיס של F^n. לכן $\dim F^n = n$.
2. $1, x, x^2, \dots, x^n$ הוא בסיס למרחב הפולינומים ממעלה לכל היותר n. לכן $\dim F_{\leq n}[x] = n + 1$.
3. $1, x, x^2, \dots$ הוא בסיס ל$F[x]$. לכן $\dim F[x] = \infty$.

טענה: סדרה $v_1, \dots, v_n \in V$ היא **בסיס** אמ"מ לכל $v \in V$ קיים ייצוג יחיד מהצורה

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n = v, \qquad a_1, a_2, \dots, a_n \in F$$

הוכחה: תרגיל.

טענה: תהא סדרה $v_1, \dots, v_n \in V$. התנאים הבאים שקולים זה לזה:

1. $v_1, \dots, v_n$ בסיס.
2. $v_1, \dots, v_n$ בת"ל מקסימלית. (כלומר, אם נוסיף איבר לסדרה, היא לא תהיה בת"ל)
3. $v_1, \dots, v_n$ פורשת מינימלית. (כלומר, אם נוציא איבר מהסדרה, היא לא תהיה פורשת)

הוכחה: תרגיל.

הבחנה: נניח כי V נוצר סופית ונסמן $n = \dim V$. מתקיים

1. כל סדרת פורשת מכילה תת-סדרה שהיא בסיס. בפרט, כל סדרה פורשת באורך n היא בסיס.
2. כל סדרה בת"ל ניתן להשלים לבסיס. בפרט, כל סדרה בת"ל באורך n היא בסיס.

תרגיל: יהא V נוצר סופית ויהא $U \subseteq V$ תת-מרחב שלו. אז U נוצר סופית ו-$\dim U \leq \dim V$. בנוסף, אם $\dim U = \dim V$ אז $U = V$.

הוכחה: תרגיל.