הרמת אקספוננט

<u>למת הרמת האקספוננט:</u> יהיו שלמים a, b , טבעי n וראשוני p עם $p|a-b$, ו-$p \nmid a, b$. אם p או n אי זוגיים מתקיים:

$$v_p(a^n - b^n) = v_p(a-b) + v_p(n)$$

אחרת: $v_2(a^n - b^n) = v_2(a-b) + v_2(a+b) + v_2(n) - 1$

1. מצאו את כל המצבים בהם:
   א. $3^k \mid 2^n - 1$
   ב. $2^n \mid 3^n - 1$
   ג. $7^n \mid 9^n - 1$
   ד. $3^n \mid 5^n + 1$

2. הראו שלכל $a > 2$ המספר $a^{a-1} - 1$ אינו חסר ריבועים.

3. הוכיחו כי אם p ראשוני אי זוגי שמחלק את $a^b - 1$, אז הוא מחלק באותה חזקה גם את:

$$b(a^{\gcd(b,p-1)} - 1)$$

4. נתון כי $3^n - 2^n = p^m$ כאשר p ראשוני. הראו כי גם n ראשוני.

5. יהיו a, b, n טבעיים זרים עם $n > 2$ ו- $a > b$. הראו כי קיים ראשוני שמחלק את $a^n - b^n$ אבל לא מחלק את $a - b$.

6. נתונים ממשיים a, b ככה שהמספרים $a - b, a^2 - b^2, a^3 - b^3, \ldots$ כולם שלמים חיוביים. האם בהכרח a, b שלמים?

7. עבור אילו n טבעיים מתקיים $n^2 \mid 2^n + 1$?

8. מצאו את כל הזוגות (n, p) עם n טבעי ו-p ראשוני כך שמתקיים: $n^{p-1} \mid (p-1)^n + 1$, כאשר נתון:
   א. $n < 2p$ (*IMO* 1999)
   ב. כלום

9. מצאו את כל הראשוניים p וטבעיים x, y כך ש:
   $x^{p-1} + y$, $y^{p-1} + x$ שניהם חזקות p.

10. הוכיחו כי $n^7 + 7$ אינו ריבוע שלם.