א"ש ב-n משתנים

1. יהיו $a_1, a_2, \dots, a_n$ מספרים ממשיים כך ש-
$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n, \qquad a_1^2 + \cdots + a_n^2 \geq n^2$$
הוכיחו כי אחד המספרים הוא לפחות 2.

2. יהיו $a_0, \dots, a_n$ מספרים ממשיים בקטע $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ עבורם
$$\tan\left(a_0 - \frac{\pi}{4}\right) + \cdots + \tan\left(a_n - \frac{\pi}{4}\right) \geq n - 1$$
הוכיחו כי
$$\tan(a_0) \cdot \ldots \cdot \tan(a_n) \geq n^{n+1}.$$

3. יהיו $a, b > 0$ ממשיים. נגדיר $f(x) = (x + a)(x + b)$. יהיו $x_1, \dots, x_n \geq 0$ שסכומם 1. מצאו את הערך המקסימלי האפשרי של
$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \min\{f(x_i), f(x_j)\}$$

4. יהיו $0 \leq x_1, x_2, .., x_n$ כך ש-$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$. מצאו את הערך המקסימלי האפשרי עבור
$$\sum_{j=1}^{n} \left(x_j^4 - x_j^5\right)$$

5. תהי $x_1, x_2, .., x_{2n}$ סדרה עולה של ממשיים אי שליליים הוכיחו:
$$(x_1 + \cdots + x_{2n})^2 \geq 4n(x_1 x_{n+1} + x_2 x_{n+2} + \cdots + x_n x_{2n})$$

6. נתונים $-1 \leq x_1, x_2, \dots, x_n \leq 1$ עבורם $x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_n^3 = 0$
הוכיחו כי
$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leq \frac{n}{3}.$$

7. נתונים $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ חיוביים עבורם מתקיים ש-$a_i < b_j$ לכל i, j. הוכיחו כי

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2 + a_i b_i + b_i^2}{3n}\right)^3 \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \cdot \frac{a_i + b_i}{2n}\right)^2$$

8. תהי $a_0, a_1, a_2, \dots$ סדרה של מספרים ממשיים כך ש-$a_0 = 0, a_1 = 1$ ולכל $n \geq 2$ קיים $1 \leq k \leq n$ המקיים

$$a_n = \frac{a_{n-1} + \cdots + a_{n-k}}{k}.$$

מצאו את הערך המקסימלי האפשרי עבור $a_{2018} - a_{2017}$.

9. הוכיחו שלכל $x_1, \dots, x_n$ מתקיים

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sqrt{|x_i - x_j|} \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sqrt{|x_i + x_j|}$$

10. נתון $n \geq 2$. מצאו את הערך λ המינימלי עבורו לכל $a_1, a_2, \dots, a_n, b$ ממשיים, מתקיים:

$$\lambda \sum_{i=1}^{n} \sqrt{|a_i - b_i|} + \sqrt{n \left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right|} \geq \sum_{i=1}^{n} \sqrt{|a_i|}$$