פונקציות יוצרות

1. קבוצת המספרים השלמים האי-שליליים מחולקת ל-n סדרות חשבוניות זרות. האיברים הראשונים של הסדרות הם $a_1, a_2, \dots, a_n$ וההפרשים הם $d_1, d_2, \dots, d_n$ בהתאמה. הוכיחו כי
$$\frac{a_1}{d_1} + \frac{a_2}{d_2} + \cdots + \frac{a_n}{d_n} = \frac{n-1}{2}.$$

2. יהי k שלם חיובי ו-$n \geq 2^{k-1}$ שלם. הוכיחו כי כמות תתי הקבוצות X של $\{1, \dots, n\}$ כך ש-
$$\sum_{x \in A} x \equiv m \ (mod\ 2^k)$$
לא תלויה ב-m.

3. מצאו את כל האפשרויות לחלק את השלמים האי-שליליים לשתי קבוצות A, B כך שיתקיים התנאי הבא: לכל n שלם אי-שלילי, כמות הפתרונות למשוואה $x + y = n$ כאשר $x < y \in A$ שווה לכמות הפתרונות למשוואה זו כאשר $x < y \in B$.

4. יהי p ראשוני, $n \geq p$ ו-$a_1, \dots, a_n$ שלמים. נסמן ב-f_k את כמות תתי הקבוצות $X \subset \{1,2, \dots, n\}$ כך ש-$|X| = k$ ו-$p | \sum_{i \in X} a_i$. נגדיר $f_0 = 1$. הוכיחו כי $p | f_0 - f_1 + f_2 - \cdots + (-1)^n f_n$.

5. איילה בוחרת מספרים שלמים $a_1, a_2, \dots, a_n$, המספרים לא בהכרח שונים. איילה מספרת לברווז את המולטי-סט $\{a_i + a_j : i < j\}$. מצאו את כל ה-nים עבורם ברווז יכול לשחזר את המספרים שאיילה בחרה.

ב. איך תשתנה התשובה אם איילה תוכל לבחור מספרים ממשיים?

6. תהי $a_1, a_2, \dots$ סדרה של מספרים שלמים. נתון ש-$a_1 = 0$. נגדיר סדרה b_n באופן הבא: $b_1 = 0$, $b_n = na_n + b_1 a_{n-1} + \cdots + b_{n-1}a_1$.
הוכיחו כי $p|b_p$ לכל ראשוני p.

7. תהי X קבוצה סופית של מספרים ממשיים, d מספר ממשי ו-$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{2025}$ ממשיים שונים מ-0. נגדיר

$$A = \left\{(x_1, x_2, \dots, x_{2025}) \in X^{2025} : \sum_{i=1}^{2025} \lambda_i x_i = d\right\}$$

$$B = \left\{(x_1, x_2, \dots, x_{2024}) \in X^{2024} \sum_{i=1}^{2024} (-1)^i x_i = 0\right\}$$

$$C = \left\{(x_1, x_2, \dots, x_{2026}) \in X^{2026} : \sum_{i=1}^{2026} (-1)^i x_i = 0\right\}$$

הוכיחו כי $|A|^2 \leq |B| \cdot |C|$.

8. יהיו $n > k \geq 1$ שלמים חיוביים ו-p ראשוני שמחלק את $\binom{n}{k}$.
הוכיחו כי ניתן לחלק את תתי הקבוצות מגודל k של $\{1, \dots, n\}$ ל-p מחלקות כך שכל שתי תתי-קבוצות עם סכום זהה יהיו שייכות לאותה המחלקה.

9. א. מצאו את כל השלמים החיוביים n עבורם קיימים $a_1, \dots, a_n$ כך שכל מספר בקבוצה $\left\{1, 2, \dots, \binom{n}{2}\right\}$ ניתן לייצג בתור הפשר $a_i - a_j$.
ב. הוכיחו כי לכל n ולכל $a_1, \dots, a_n$, לפחות $\left\lceil \frac{n(n-6)}{19} \right\rceil$ מהמספרים בקבוצה $\left\{1, 2, \dots, \binom{n}{2}\right\}$ לא ניתנים להצגה בתור הפשר $a_i - a_j$.

10. נתונים $p, q > 1$ זרים ושלם חיובי n. מספר שלם חיובי יקרא מציק אם לא ניתן להציג אותו בצורה $px + qy$, עבור x, y שלמים אי-שליליים. נסמן ב-$S(p, q)$ את סכום החזקות ה-nיות של כל המספרים המציקים. הוכיחו כי קיים שלם c עבורו לכל זוג (p, q) מתקיים ש-$(p-1)(q-1)|cS(p, q)$.