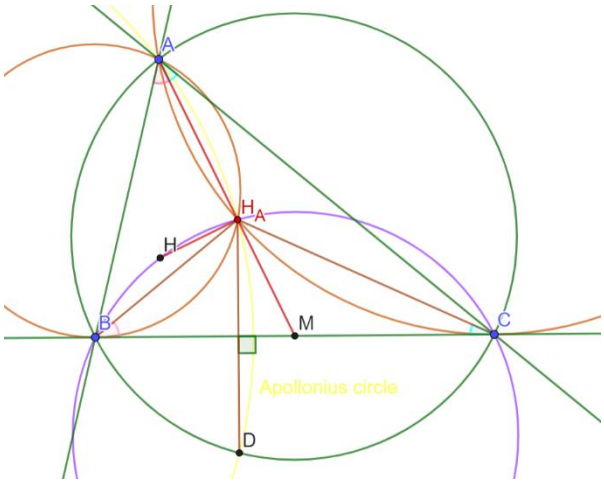
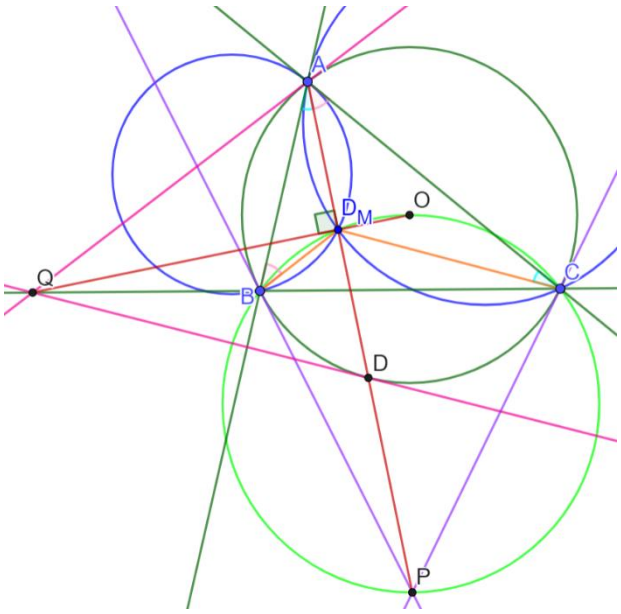
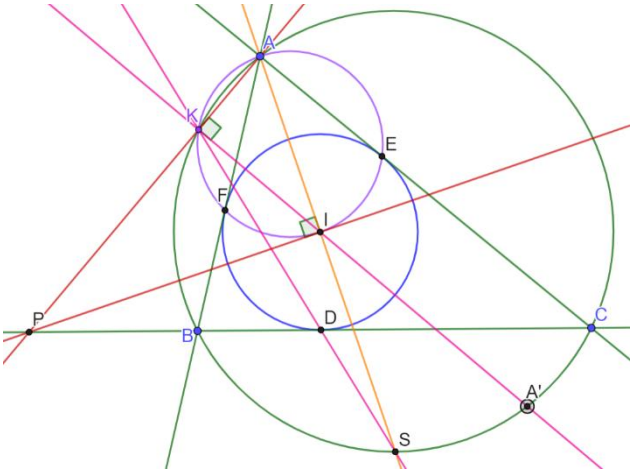
נקודת האמפטי במשולש



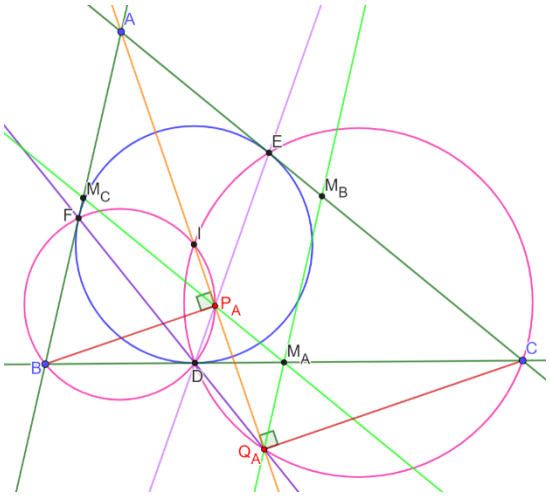
נקודת דאמפטי במשולש



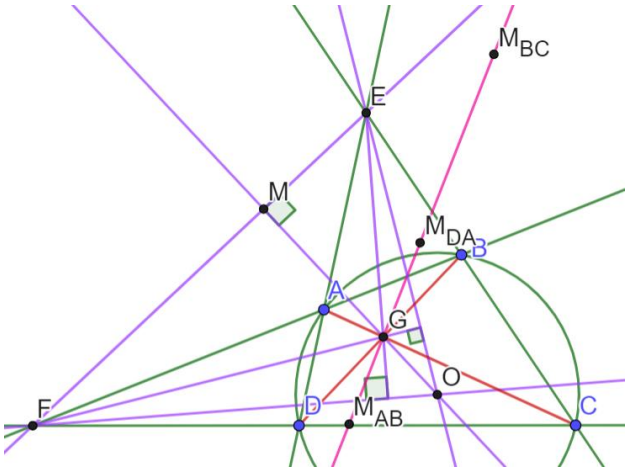
נקודת הכריש



נקודות למה איראנית



מרובע שלם: משפט האיקסים וישר אובר



(דמיינו למטה שיקוף של M ביחס לCD)

מצא את המשולש עם פתרונות

כל הזוויות בכל הפתרונות הן מכוונות.

1. AD, BE, CF הם גבהים במשולש ABC. DF, BE נחתכים בנקודה P, והישרים DE, CF נחתכים בנקודה Q, EF, BC נחתכים בנקודה R. הוכיחו כי P, Q, R על ישר.

פתרון:
נסתכל בתוך משולש DEF על ציור. נשים לב שהגבהים AD, BE, CF הם חוצי זוויות פנימיים במשולש הזה, והצלעות המקוריות הן חוצי זוויות חיצוניים. אז P, Q חיתוך חוצי זוויות פנימיים על צלעות נגדיות, וR החיתוך של החוצה זוית החיצוני עם הצלע השלישית, ומוכר כי שלושתם על ישר.

2. יהי $ABCDE$ מחומש קמור המקיים:
$$\angle BAC = \angle CAD = \angle DAE, \quad \angle ABC = \angle ACD = \angle ADE$$
והאלכסונים BD, CE נחתכים בנקודה P. הוכיחו כי AP חוצה את הצלע CD.

פתרון:
נשים לב כי שוויון הזוויות פשוט אומר כי יש דמיון משולשים, $BAC \sim CAD \sim DAE$ ועל כן יש סימטריה בשאלה בין B לE. נסתכל על משולש ACD, ונטען שP היא האמפטי בו. נגדיר בכיוון ההפוך, את P להיות האמפטי, ונטען כי BPD ישר והשני סימטרי. נשים לב כי $\angle APC \overset{\text{האמפטי}}{=} \angle ABC = \angle ACD$ ועל כן $ABCP$ חסום במעגל, אזי:
$$\angle CPB = \angle CAB = \angle DAC \overset{\text{האמפטי}}{=} \angle CPD$$
ועל כן BPD ישר, ובאופן סימטרי CPE ישר. ואנחנו יודעים כי AP חוצה את CD.

3. במשולש ABC, נשקף את BC ביחס לישרים AB, AC, ואת חיתוך השיקופים נסמן בX. נסמן X' הנקודה הנגדית ל-X על המעגל החוסם את XBC. בנוסף נסמן O מרכז המעגל החוסם את ABC, D עקב האנך מ-A ל-BC. הוכיחו כי הישרים DO, AX' נחתכים על המעגל החוסם של XBC.

פתרון:
נסתכל במשולש XBC. מכיוון שXB שיקופי לBC ביחס לAB, AB הוא חוצה הזווית החיצוני של $\angle XBC$, ובאופן דומה AC חוצה את $\angle XCB$ מבחוץ, ולכן A מפגש חוצי זוויות חיצוני מול X במשולש XBC. נשים לב שבמשולש זה, O מרכז מעגל תלתן, ועל כן קוטב "דרומי" במשולש XBC, ובנוסף D נקודת השקה של המעגל החסום מבחוץ מול X עם הצלע. עכשיו כשאנחנו יודעים מה כל הנקודות, נשים לב שנקודת החיתוך של DO, AX', היא פשוט נקודת הכריש (החיצונית!) מול X במשולש XBC ולכן על המעגל.

4. יהי מרובע $ABCD$ חסום במעגל, ומקיים כי $AB \cdot CD = AD \cdot BC$. הוכיחו כי קיימת נקודה P בתוכו המקיימת:

$$\angle PAB = \angle PBC = \angle PCD = \angle PDA$$

פתרון:
נתון בעצם ש$ABCD$ מרובע הרמוני, והדרישה בשאלה היא נקודה P על כמה מעגלים משיקים לצלעות ציקליים, ולכן הגיוני להסתכל על משולש ABC ונקודת דאמפטי מB בו, שנסמנה X. היא מקיימת כי מעגל XAB משיק לצלע BC, ולכן על מעגל אחד משותף שP דורשת, אבל זה עוד לא מספיק לחשבון זוויות.
אבל נשים לב שמרובע הרמוני הוא סימטרי, ואמצע האלכסון בו זה גם דבר סימטרי, ועל כן X היא דאמפטי מD במשולש ADC גם, ולכן מקיימת גם כי XCD משיק לצלע AD.
ועכשיו אז אם נגדיר את P להיות החיתוך השני של שני מעגלים אלו, נקבל כי:

$$\angle PAB \overset{\text{השקה ראשונה}}{=} \angle PBC = \angle PXB \overset{XBD \text{ ישר}}{=} \angle PXD = \angle PCD \overset{\text{השקה שנייה}}{=} \angle PDA$$

5. במשולש ABC, E, F עקבי הגבהים מנקודות B, C בהתאמה. שני מעגלים עוברים בA, F ומשיקים לBC, ונסמן את נקודות ההשקה בP, Q. הוכיחו כי הישרים PE, QF נחתכים על המעגל החוסם את AEF.

פתרון:
נסתכל על משולש APQ, ונשים לב שF היא האמפטי בו, ואז גם B אמצע הצלע PQ.
אם נסמן את מפגש הגבהים בABC בH, אז מתקיים כי HF מאונך לתיכון AB, וגם H על הגובה מA לPQ, ולכן בהכרח H מפגש גבהים גם בPAQ. נשים לב כי HBE ישר, כאשר B אמצע צלע של PQ, וגם מעגל עם קוטר AH עובר בE, אז E זו הנקודה המוכרת הזאת (נו אתם יודעים על מה אני מדבר, באנגלית קוראים לה $queue\ point$) שנמצאת על המעגל החוסם APQ. אז עכשיו הצלחנו לתרגם לחלוטין את כל מה שנשאר להוכיח למשולש APQ. מכאן יש גם סיום בחשבון זוויות קצר שמשתמש בכך שהחיתוך הוא השיקוף של אחד מעקבי הגבהים במשולש החדש ביחס לAH, וגם אפשר לעשות רביעית הרמוניות- E זה האמפטי בPQH ואם נסמן M, N עקבי גבהים מP, Q במשולש החדש, אז נקבל מכך כי:

$$(PE \cap (AEF), M; H, A) \overset{\text{הטלה מ}P}{=} (E, H; M, N) \overset{\text{מוכר לגבי האמפטי}}{=} -1 =$$
$$\overset{\text{מוכר לגבי האמפטי}}{=} (F, A; N, M) \overset{\text{הטלה מ}Q}{=} (QF \cap (AEF), M; H, A)$$

ולכן החיתוכים עם המעגל מזדהים.

6. במשולש ABC, האנך האמצעי של BC חותך את AB, AC בנקודות X, Y. מרכז המעגל החוסם את AXY יסומן בO_A. באופן סימטרי נגדיר O_B, O_C. הראו כי המעגלים החוסמים את $ABC, O_AO_BO_C$ משיקים זה לזה.

פתרון:
נשים לב כי מחשבון זוויות קל מתקיים AO_A, BO_B, CO_C משיקים למעגל החוסם. זה נותן לנו מוטיבציה לסמן P, Q, R מפגשי המשיקים מA, B, C לחוסם, שמייצרים משולש שבתוכו ABC זה המעגל החוסם. במשולש הזה, האנך האמצעי של BC הוא בעצם חוצה הזווית מP, ואנחנו חותכים אותו עם קטעים בין הנקודות השקה של המעגל החסום, כלומר בדיוק X, Y אלו נקודות למה איראנית! אז ניתן להוכיח בעזרת תכונת קטע

אמצעים יחסית בקלות כי מרכז מעגל AXY חייב להיות אמצע הצלע QR. לכן O_A, O_B, O_C אמצעי צלעות בPQR, אז מפויירבאך מעגל $O_AO_BO_C$ משיק לABC.

7. במשולש ABC, נסמן את מרכז המעגל החוסם O ומפגש הגבהים H. AO נחתך עם BH, CH בנקודות P, Q בהתאמה. הוכיחו שמרכז המעגל HPQ על התיכון מA.

פתרון:
ניתן לראות בעזרת חשבון זוויות קל כי $HPQ \sim ABC$ באוריינטציה הפוכה, אז עכשיו נרצה להסתכל טיפה לפי משולש HPQ על הציור. אנחנו יודעים מה היא A לפי משולש זה, כי מחשבון זוויות קל מתקיים גם כי HA משיק למעגל HPQ. אז A זה החיתוך של המשיק עם הצלע הנגדית, ואז אנחנו מחברים את זה למרכז המעגל החוסם שנסמנו K. אז מהציור של דאמפטי, מתקיים כי הישר AK מאונך לתיכושקף במשולש HPQ ואז:

$$\angle(AH, AK) \overset{\text{מאונכות}}{=} \angle(KH, HPQ\text{תיכושקף ב}) \overset{\text{שיקוף בחוצה זווית}}{=} \angle(HPQ\text{תיכון ב}, HPQ\text{גובה ב})$$
$$= \angle(ABC\text{גובה ב}, ABC\text{תיכון ב}) = \angle(AH, ABC\text{תיכון ב}) \overset{\text{דמיון הפוך}}{=}$$

ולכן K על התיכון מA במשולש ABC.

8. יהי I_A מרכז המעגל החסום מבחוץ לקודקוד A במשולש ABC, ויהי מעגל ω העובר בנקודות A, I_A ונחתך עם הקרנות $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ בנקודות X, Y בהתאמה. יהיו נקודות S, T על הקטעים I_AB, I_AC בהתאמה עבורן $\angle AXI_A = \angle I_ATB$ וגם $\angle AYI_A = \angle I_ASC$. הישרים BT, CS נחתכים בנקודה K. הראו כי TS, XY, KI_A נפגשים בנקודה.

פתרון:
נסמן בZ את השיקוף של X ביחס לBI_A, שהוא על BC, ולפי המעגל ω הוא גם שיקוף Y ביחס לI_AC. אז לפי נתוני הזוויות, ומכיוון ששיקוף משנה סימן זווית, $BZTI_A, CZSI_A$ מעגלים. לכן אם נסתכל על המרובע השלם שנוצר מהישרים BSI_A, CTI_A, BKT, CKS אז Z היא המיקל שלו. בנוסף Z על האלכסון החיצוני, ולכן בהכרח SI_ATK חסום במעגל, ומה שבעצם מבקשים להוכיח זה שמפגש האלכסונים שלו, ושיקופים של מיקל ביחס לשתיים מהצלעות, נמצאים על ישר- $X, Y, TS \cap KI_A$. וזה פשוט ישר אובר.

9. יהי $ABCD$ מרובע קמור עבורו $\angle ABC = \angle ADC < 90°$. חוצי הזוויות הפנימיים של $\angle ABC, \angle ADC$ חותכים את AC בנקודות E, F בהתאמה, ונפגשים בנקודה P. נסמן גם M אמצע AC, ω המעגל החוסם את BPD. הישרים BM, DM חותכים את ω בנקודות X, Y בהתאמה, ונסמן בQ את חיתוך הישרים XE, YF. הראו כי $PQ \perp AC$.

פתרון:
יש לנו את הנתון המוזר $\angle ABC = \angle ADC$, שבעצם אומר שD על השיקוף של מעגל ABC ביחס לAC, ובנוסף נקודות על התיכון שיוצאות בפנים של המשולש, ולכן הגיוני לנחש שX, Y נקודות האמפטי במשולשים ABC, ADC בהתאמה. נוכיח את זה בכיוון ההפוך- נגדיר שX, Y הן האמפטי במשולשים אלו, ונוכיח כי B, X, P, Y, D על מעגל. נראה פשוט כי $\angle BXD = \angle BPD$. בעצם נשים לב כי $AXCD$ מעגל מאחת מתכונות האמפטי, וזה מקל על החשבון זוויות הבא (שכמובן בזוויות מכוונות):

$$\angle BPD = \angle(BP,BC) + \angle(BC,AC) + \angle(AC,AD) + \angle(AD,PD) \overset{\text{חוצים זוויות שוות}}{=}$$
$$= \angle(BC,AC) + \angle(AC,AD) \overset{\text{מעגלי האמפטי}}{=} \angle(BX,XC) + \angle(XC,XD) = \angle BXD$$
ולכן באמת $BXPD$ על מעגל ומסימטריה גם $BXPYD$ אז ניחושינו באמת היה נכון.
עכשיו ננחש כי Q נמצאת גם על ω, כי זה נשמע הגיוני לעזור בחשבון זוויות לסיים בסוף. את זה יש שתי דרכים להוכיח- או עם חשבון זוויות מפרך, שבעצם נרצה לחשבן את $\angle(XE,YF)$, מה שניתן לעשות כי מכיוון שהאמפטי על אפולניוס, XE חוצה את $\angle AXC$ ולכן אנחנו יודעים לחשב את כיוונו, והחשבון זוויות מסתדר בסוף.
נעשה טיעון אחר- כמו שאמרנו XE חוצה את $\angle AXC$, ובנוסף $\angle AXC = \angle AYC$, ובנוסף האמפטי היא נקודה סימטרית ישירות מהגדרה- B היא האמפטי בAXC. אז בעצם יש לנו כאן סימטריה, אם נחליף את $ABCD$ ב$AXCY$, ניתן להשתמש במה שעשינו בינתיים בשאלה- מפגש החוצי זוויות על אותו מעגל עם שתי נקודות האמפטי ושני קודקודים.
אבל אמרנו שהחוצי זוויות הם XE, YF, ולכן חיתוכם, Q, על מעגל $BXYD$.
אז קיבלנו כי $BXPQYD$ מעגל. עכשיו אם נסמן K עקב חוצה זוית חיצוני מB לAC, אז $BKXE$ מעגל אפולניוס, ולכן:
$$\angle(PQ,AC) = \angle(PQ,PB) + \angle(PB,AC) \overset{\omega}{=} \angle(XQ,XB) + \angle(BE,EK) =$$
$$= \angle(EX,XB) + \angle(BX,XK) = \angle(EX,KX) \overset{\text{מעגל } BKXE}{=} \angle(BE,BK) = 90°$$
שזה מה שרצינו.

10. א. במשולש ABC המעגל החסום ω משיק לצלעות בנקודות D,E,F, ובעל מרכז I. נסמן M אמצע EF, N אמצע הגובה מD לEF. בנוסף נגדיר H מפגש הגבהים בBCI. הוכיחו כי M,N,H על ישר אחד.

ב. המעגל ABI חותך את ω בC_1, C_2, והמעגל ACI חותך את ω בB_1, B_2. הראו כי הציר הרדיקלי של המעגלים החוסמים את CC_1C_2, BB_1B_2 עובר בH.

פתרון סעיף א:
יש לנו מפגש גבהים בשאלה, ונראה לי אחת ההגדרות הטובות למפגש גבהים היא חיתוך הגבהים. אז נסמן X,Y עקבי הגבהים לCI, BI מB, C בהתאמה. נשים לב כי אלו בדיוק נקודות למה איראנית (מכיוון אחר מהציור בהתחלה) אז שתיהן גם על ישר EF.
עכשיו נרצה דרך לנסות לקשר בין M,N,H, מכיוון שיעזור למחוק כמה שיותר נקודות מהציור ולעבור לציור מצומצם.
הדרך לקשר היא בעצם משולש DXY- H הוא מרכז מעגל החסום מבחוץ בו מול D, N זה אמצע הגובה מD, ולבסוף M זה עקב אנך מI לXY, ובמשולש DXY מרכז המעגל החסום הוא I, לכן D היא בדיוק נקודת ההשקה של המעגל החסום מבפנים.
אז קיבלנו טענה מצומצמת, ואפילו מוכרת וקלה- אמצע גובה, נקודת השקה של מעגל חסום מבפנים ומרכז מעגל חסום מבחוץ על ישר. לכן M,N,H על ישר.

פתרון סעיף ב:
נסמן ω_1, ω_2 חוסמים את BB_1B_2, CC_1C_2 בהתאמה. נוכיח כי הציר הרדיקלי הוא ישר MNH מסעיף קודם. לפי צירים רדיקליים על מעגלים $ABI, AEFI, \omega$. נקבל כי C_1C_2, AI, EF נחתכים בנקודה, ונקודה זו היא בדיוק M ובאופן סימטרי גם B_1B_2 עובר בM. לכן מצירים רדיקליים על $\omega, \omega_1, \omega_2$ נקבל כי M על הציר הרדיקלי של ω_1, ω_2 לכן מספיק להראות כי N עליו.
עכשיו נסמן P,Q אמצעי DF, DE בהתאמה. אז בעצם ישר C_1C_2 הוא MP, וישר B_1B_2

הוא MQ, אך כמובן שישרים אלו לא יספיקו למסקנה שלנו- צריך להשתמש בכך שהמעגלים ω_1, ω_2 עוברים בB, C בהתאמה. אז עכשיו נעבור למצב של לראות מה אנחנו כן מבינים בציור, ומה לא. נסמן $f(S), f_1(S), f_2(S)$ דרגות הנקודה של S למעגלים $\omega, \omega_1, \omega_2$ בהתאמה, לנקודה S כללית. אז מלינאריות הדדרגה (הפרש דרגות) מתקיים כי:

$$0 \overset{M \text{ על הציר הרדיקלי}}{=} f_1(M) - f(M) = \frac{\big(f_1(E) - f(E)\big) + \big(f_1(F) - f(F)\big)}{2} =$$

$$\overset{E,F \in \omega}{=} \frac{f_1(E) + f_1(F)}{2}$$

ולכן $f_1(E) = -f_1(F)$, ובאופן סימטרי נקבל $f_1(F) = -f_1(E) = f_1(D)$ וגם $f_2(E) = -f_2(F) = f_2(D)$ אז זה מרגיש כאילו אנחנו קרובים מאוד להבין בדיוק מה הןf_1, f_2 (כי להבין אותן ב3 נקודות יספיק לכללי) אבל עוד לא השתמשנו בנתונים $B \in \omega_1, C \in \omega_2$ שבבירור נצטרך אותם. אז הרעיון מכאן כדי להבין באמת איך הפונקציות עובדות, הוא שהן מאוד נוחות על DEF, וגם מספיק להוכיח שהן מזדהות על נקודה שבנויה בקלות מDEF (אמצע הגובה), ויש להן הפרש לינארי מפונקציה נוחה אחרת (f), אז נעבוד בקורדינאטות בריצנטריות מDEF. נסמן $a = |EF|, b = |DF|, c = |DE|$ והזוויות המתאימות α, β, γ ומתקיים:

$$f(B) = BD^2 = \frac{b^2}{\cos^2\beta}, \qquad B = (a^2 : -b^2 : c^2)$$

ואז:

$$-\frac{b^2}{\cos^2\beta} \overset{B \in \omega_1}{=} f_1(B) - f(B) \overset{\text{לינאריות דדרגה}}{=} \frac{a^2 f_1(D) - b^2 f_1(E) + c^2 f_1(F)}{a^2 + c^2 - b^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_1(D) = -f_1(E) = f_1(F) = \frac{-4a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)(a^2+c^2-b^2)}$$

ובאופן סימטרי:

$$f_2(D) = -f_2(F) = f_2(E) = \frac{-4a^2b^2c^2}{(a^2+b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)}$$

ובקורדינאטות בריצנטריות, $N = (b\cos\gamma + c\cos\beta : b\cos\gamma : c\cos\beta)$ ולכן:

$$2(b\cos\gamma + c\cos\beta)\big(f_1(N) - f(N)\big) \overset{\text{לינאריות דדרגה}}{=}$$

$$= (b\cos\gamma + c\cos\beta) f_1(D) + b\cos\gamma\, f_1(E) + c\cos\beta\, f_2(F) =$$

$$= 2c\cos\beta \cdot f_1(D) = \frac{a^2+c^2-b^2}{a^2+b^2-c^2} \cdot 2b\cos\gamma \cdot f_1(D) =$$

$$= 2b\cos\gamma \cdot f_2(D) \overset{\text{סימטרי}}{=} 2(b\cos\gamma + c\cos\beta)\big(f_2(N) - f(N)\big)$$

ולכן $f_2(N) = f_1(N)$, כלומר N על הציר הרדיקלי כמו שרצינו.

בתיאבון!

רמז: ניקח את המשולש שנוצר על ידי א והקו שהוספתי.