דואליות

0. שאלת חימום: נתון מרובע חוסם $ABCD$. נסמן את נקודות ההשקה של הצלעות AB, BC, CD, DA עם המעגל החסום ב-X, Y, Z, W בהתאמה. הוכיחו כי AC, BD, XZ, YW נפגשים בנקודה אחת.

1. נתונים מעגלים ω_1, ω_2 שמשיקים באופן פנימי בנקודה A. נסמן ב-O_1, O_2 את המרכזים של ω_1, ω_2 בהתאמה. יהי BC קוטר של ω_1 ו-E, D נקודות על ω_2 כך ש-BE, BD משיקים ל-ω_2. הוכיחו כי DE, AB, CO_2 נפגשים בנקודה אחת.

2. נסמן את אמצעי הצלעות במשולש ABC כ-M_A, M_B, M_C. נסמן את נק' החיתוך של המשיק למעגל החסום מ-M_A עם M_BM_C ב-A'. נגדיר B', C' באופן דומה. הוכיחו כי A', B', C' נמצאות על ישר אחד.

3. המעגל החסום במשולש ABC משיק לצלעות BC, AC, AB ב-D, E, F בהתאמה. DI נחתך עם EF ב-M הוכיחו כי AM חוצה את BC.

4. נתון מרובע $ABCD$ חסום במעגל Ω. המשכי הצלעות AB, CD נפגשים בנקודה E. האינוורסית של E ביחס ל-Ω תסומן ב-E'. האנך האמצעי של EE' נחתך עם BC בנקודה P. הוכיחו כי $AD||PE$.

5. יהי I מרכז המעגל החסום במשולש ABC. יהי ℓ ישר דרך A שמקביל ל-BC. הישר BI חותך את AC, ℓ ב-D, P בהתאמה. הישר CI חותך את AB, ℓ ב-E, Q בהתאמה. נסמן ב-O_1, O_2 את מרכזי המעגלים החוסמים של BEQ, CDP. הוכיחו כי $\angle O_1AO_2 = \angle BIC$.

6. משולש ABC חסום במעגל Ω וחוסם מעגל ω שמרכזו I. נסמן ב-E, F את נקודות ההשקה של ω לצלעות AB, AC. הישר EF נחתך עם Ω בנקודות P, Q. הישר AI חותך את המעגל פעם שנייה ב-S. נסמן ב-M את אמצע BC. הוכיחו ש-M, I צמודות איזוגונלית במשולש PQS.

7. המעגל החסום במשולש ABC משיק לצלעות BC, AC, AB ב-D, E, F בהתאמה. הנקודות הנגדיות ל-E, F על המעגל החסום יסומנו U, V. הישרים UV ו-BC נחתכים ב-W. M היא אמצע הצלע BC. הוכיחו כי $\angle WIM = 90°$.

8. יהי $ABCD$ מרובע חוסם-חסום. המעגל החסום משיק לצלעות בנקודות X,Y,Z,W. נסמן ב-M,N,K,L את אמצעי הקטעים AC,BD,XZ,YW בהתאמה. הוכיחו כי $MN \perp KL$.

9. נסמן את אמצעי הצלעות במשולש ABC כ-M_A,M_B,M_C. נסמן את נק' ההשקה של המעגל החסום ל-AB,AC ב-E,F בהתאמה. נסמן ב-X את החיתוך של EM_C ו-FM_B. הוכיחו כי AX עובר במפגש הגבהים של BIC.

10. משולש ABC חסום במעגל Ω שמרכזו O. אמצעי הקשתות $\widehat{BAC}, \widehat{AB}, \widehat{AC}$ יסומנו ב-N,W,E בהתאמה. הישר NE נחתך עם הצלע AB בנקודה X והישר NW נחתך עם הצלע AC בנקודה Y. הוכיחו כי מפגש הגבהים של OXY נמצא על EW.

11. משולש ABC חסום במעגל Ω שמרכזו O וחוסם מעגל ω שמרכזו I. הצלעות BC,CA,AB משיקות ל-ω ב-D,E,F בהתאמה. עקב האנך מ-D ל-EF יסומן ב-P. הישר AP נחתך עם Ω שוב ב-T. המעגלים AET,AFT חותכים את ω שוב ב-X,Y בהתאמה. הוכיחו כי EY,FX,OI נפגשים בנקודה אחת.

12. המעגל החסום במשולש ABC משיק לצלעות AC,AB ב-E,F בהתאמה. המשיקים למעגל AEF ב-E,F נחתכים ב-S. הישרים EF ו-BC נחתכים ב-T. הוכיחו כי המעגל עם קוטר TS מאונך למעגל 9 הנקודות של BIC.