פולינומים ציקלוטומיים

1. הראו כי לכל $p \geq 5$ ולכל n שלם חיובי, המספר
$$n + n^2 + \cdots + n^{p-1} + 2$$
אינו ריבוע.

2. יהיו $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ראשונים שונים גדולים מ-3. הוכיחו כי ל-$2^{p_1 p_2 \cdots p_n} + 1$ יש לפחות 2^{2^n} מחלקים.

3. יהי $n > 1$ שלם ו-p ראשוני כך שמתקיים:
$$4^n + 2^n + 1 = p$$
הוכיחו כי n זו חזקה של 3.

4. הראו כי קיימים אינסוף זוגות (p, q) של מספרים ראשוניים עבורם
$$p|2^{q-1} - 1, \qquad q|2^{p-1} - 1$$

5. פתרו בשלמים חיוביים
$$(a+1)(a^2 + a + 1) \cdot \ldots \cdot (a^n + a^{n-1} + \ldots + 1) = a^m + a^{m-1} + \ldots + 1$$

6. יהי $p \equiv 1 \ mod \ 6$ ראשוני שונה מ-7. נסמן $m = 2^p - 1$. הוכיחו כי
$$127m|2^{m-1} - 1$$

7. פתרו בשלמים חיוביים:
$$\frac{x^7 - 1}{x - 1} = y^5 - 1$$

8. הוכיחו כי בסדרה $10001, 100010001, 1000100010001, \ldots$ אין מספרים ראשוניים.

9. יהיו r, s שלמים חיוביים. נגדיר סדרה באופן הבא: $a_0 = 0, a_1 = 1$,
$$a_n = r a_{n-1} + s a_{n-2}$$
נסמן ב-Π_n את מכפלת n האיברים הראשונים בסדרה. הראו כי
$\Pi_k \cdot \Pi_{n-k} | \Pi_n$.

10. יהיו $x > 2, y > 1, z > 0$ שלמים המקיימים $x^y + 1 = z^2$. הוכיחו כי כמות המחלקים הראשוניים של x גדולה לפחות ב-2 מכמות המחלקים הראשוניים של y.