פולינומים ציקלוטומיים

1. יהי $n > 1$ שלם ו-p ראשוני כך שמתקיים:

$$4^n + 2^n + 1 = p$$

הוכיחו כי n זו חזקה של 3.

2. הוכיחו כי בסדרה $10001, 100010001, 1000100010001, \ldots$ אין מספרים ראשוניים.

3. יהיו $x > 2, y > 1, z > 0$ שלמים המקיימים $x^y + 1 = z^2$. הוכיחו כי כמות המחלקים הראשוניים של x גדולה לפחות ב-2 מכמות המחלקים הראשוניים של y.

4. נסמן ב-$\sigma(n)$ את סכום המחלקים של n. הוכיחו כי אם $\sigma(n) = 2^m$ אז n הוא מכפלה של ראשוני מרסן שונים.

5. נניח כי $(x+1)^n - 1$ מתחלק בפולינום מתוקן P ממעלה d. נניח בנוסף ש-d זוגי וכל המקדמים של P אי-זוגיים. הוכיחו כי $d + 1 | n$.

6. הוכיחו כי קיימים אינסוף שלמים חיוביים n כך שכל המחלקים הראשוניים של $n^2 + n + 1$ קטנים או שווים ל-$\sqrt{n}$. ב. n^ε לכל $\varepsilon > 0$.

7. יהי k שלם חיובי ו-$\varepsilon > 0$. הוכיחו כי קיימים אינסוף שלמים חיוביים n עבורם המחלק הראשוני המקסימלי של $n^k + 1$ קטן מ-n^ε.

8. עבור ראשוני p, תת קבוצה של שאריות מודולו p תקרא תת-חבורה כפלית חסרת סכומים אם מתקיימים שני התנאים הבאים:

- קיימת שארית לא אפסית $\alpha \bmod p$ כך ש-$S \equiv \{1, \alpha^1, \alpha^2, \ldots\}$.
- לא קיימים $a, b, c \in S$ (לא בהכרח שונים) כך ש-$a + b = c$.

הוכיחו כי לכל שלם N קיים ראשוני p ותת-חבורה כפלית חסרת סכומים S של $\mathbb{F}_p$ כך ש-$|S| \geq N$.