עקומים

1. על הצלעות AB, AC, BC של משולש ABC נתונות נקודות D, E, F בהתאמה. תהי M נקודת מיקל של D, E, F ביחס ל-ABC. הוכיחו כי AD, BE, CF נפגשים בנקודה אחת אם ורק אם המעגלים ADM, BEM, CFM נחתכים בשתי נקודות משותפות.

2. H היא מפגש הגבהים במשולש ABC, ונתונה נקודה P במישור. המעגלים BCP, AHP נפגשים שנית בנקודה X. באופן דומה נגדיר את Y, Z. הוכיחו כי AX, BY, CZ נפגשים בנקודה.

3. יהי מרובע $ABCD$ ו-M נקודת מיקל שלו. הוכיחו כי M נמצאת על מעגל 9 הנקודות של המשולש שנוצר משלושת האלכסונים של המרובע.

4. יהי מרובע $ABCD$ ו-P נקודה בתוכו. המשכי הצלעות AB, CD נחתכים בנקודה E והמשכי הצלעות AD, BC נחתכים בנקודה F. המעגלים ABP, CDP נחתכים שנית בנקודה R והמעגלים BCP, ADP נחתכים שנית בנקודה Q. הוכיחו כי המעגלים EPQ, FPR נחתכים שנית על הישר EF.

5. נתון משולש ABC ומרכזי המעגלים החסומים במשולש I, I_A, I_B, I_C. תהי D נקודה על המעגל החוסם של ABC ו-E על הצלע BC כך ש-$\angle BAE = \angle DAC$. הוכיחו כי E נמצאת על הציר הרדיקלי של המעגלים DII_A, DI_BI_C.

6. במרובע $ABCD$ נתון כי $AB = AD$. השיקופים של האלכסון BD ביחס לחוצי הזוויות בקודקודים B ו-D נחתכים בנקודה L. הוכיחו כי נקודת מיקל של $ABCD$ נמצאת על ישר CL.

7. יהי משולש ABC ושתי נקודות P, Q הצמודות איזוגונלית ביחס למשולש. על המעגל החוסם של המשולש נבחרה נקודה X כך ש-$\angle BXP = \angle QXC$. באופן דומה נבחרו נקודות Y, Z. הוכיחו כי AX, BY, CZ נפגשים בנקודה אחת.

8. נסמן ב-M את נקודת מיקל של המרובע $ABCD$. חוצי הזווית הפנימי והחיצוני של AMC חותכים את ישר גאוס של המרובע בנקודות X_1, X_2. R היא הנקודה במישור עבורה X_1MX_2R מלבן. נסמן ב-B_1 את הנקודה על ישר BR כך ש- $BM = B_1M$. נסמן ב-D_1 את הנקודה על ישר DR כך ש- $DM = D_1M$. הוכיחו כי אמצע הקטע B_1D_1 נמצא על ישר גאוס.

ישר גאוס של מרובע הוא הישר שמחבר בין אמצעי האלכסונים שלו.

9. נתון משולש ABC חד זוויות בעל מעגל חוסם ω. מעגל Γ משיק ב-A ל-ω ומשיק ל-BC בנקודה D. Γ חותך את AB, AC בנקודות P, Q בהתאמה. השיקופים של D ביחס ל-B ול-C הם M ו-N בהתאמה. הישרים MP, NQ נחתכים ב-K וחותכים את Γ בנקודות I, J בהתאמה. ישר KA חותך שנית את המעגל IJK ב-X. הוכיחו כי $\angle BXP = \angle CXQ$.

10. במרובע קמור $ABCD$ מתקיים $AB \cdot CD = BC \cdot AD$. הנקודה X נמצאת בתוך $ABCD$ ומקיימת $\angle XAB = \angle XCD$ וגם $\angle XBC = \angle XDA$. הוכיחו כי $\angle BXA + \angle DXC = 180°$.