המעגל הסודי

בכל השאלות בתרגיל נתון או צריך להוכיח איזשהו תנאי על זוויות (לרוב שוויון של שתי זוויות) וצריך להסיק ממנו קיום של מעגל מגניב

1. נתון מרובע $ABCD$ בו הזווית $\angle A$ ישרה. אמצע הצלע BC יסומן M. הראו שאם $\angle MAB = \angle CDA$ אז מתקיים $\angle CAM = \angle BDA$.

2. נתון משולש ABC בו $\angle A = 120°$. הנקודות D ו-E נמצאות על הצלעות BC ו-AC בהתאמה כך ש-AD ו-BE הם חוצי זוויות במשולש. הוכיחו ש-$\angle DEB = 30°$.

3. המעגל החסום במשולש ABC משיק לצלעותיו BC, CA, AB בנקודות D, E, F בהתאמה. הישר AD חותך בפעם השנייה את המעגל החסום בנקודה X. הישרים DE ו-DF חותכים את הישר דרך A המקביל ל-BC בנקודות P ו-Q בהתאמה. הוכיחו כי $\angle PXQ = \angle FXE$.

4. נסמן ב-M את אמצע הצלע BC במשולש שווה-השוקיים ABC בו $AB = AC$. תהי X נקודה על הקשת הקטנה MA במעגל החוסם את המשולש ABM. נסמן ב-T את הנקודה בתוך שטח הזווית AMB המקיימת ש-$\angle TMX = 90°$ וגם $TX = BX$. הראו שערך הביטוי $\angle BTM - \angle MTC$ אינו תלוי בבחירת הנקודה X.

5. המרובע $ABCD$ הוא טרפז כך ש-$AB \parallel CD$. אמצעי האלכסונים AC ו-BD יסומנו ב-E וב-F בהתאמה. נתון ש-$\angle BDA = \angle CDE$. הוכיחו ש-$\angle CAB = \angle DAF$.

6. במשולש ABC מרכז המעגל החוסם יסומן O, מרכז המעגל החסום יסומן I, ומרכז המעגל החסום מבחוץ מול A יסומן I_A. השיקוף של A מבעד לצלע BC יסומן D. הוכיחו ש-$\angle I_A OI = \angle IDI_A$.

7. המעגלים Ω_1, Ω_2 נחתכים בנקודות A ו-B. המשיק המשותף שלהם הקרוב יותר ל-B משיק ל-Ω_1 ב-U ול-Ω_2 ב-V. הישר UB פוגש בשנית את Ω_2 ב-P. אמצע PV יסומן M. הראו כי $\angle BAM = \angle VBP$.

8. נסמן ב-M את אמצע הצלע BC במשולש שווה-השוקיים ABC בו $AB = AC$. תהי P נקודה כך ש- PA מקביל ל-BC וגם $PB < PC$. תהיינה X ו-Y נקודות על המשכי הקרניים PB ו-PC בהתאמה, כך ש- $\angle PXM = \angle PYM$. הוכיחו שהמרובע $APXY$ חסום במעגל.

9. יהי $ABCD$ מרובע קמור שזוויותיו $\angle ABC$ ו- $\angle CDA$ הן קהות, וגם $\angle DAB = \angle BCD$. נסמן ב-E וב-F את השיקופים של A ביחס לישרים BC ו-CD בהתאמה. הקטעים AE ו-AF חותכים את הישר BD ב-K וב-L בהתאמה. הוכיחו שהמעגלים החוסמים של המשולשים BEK ו-DFL משיקים זה לזה.

10. במשולש ABC מסומנות הנקודות A_1 ו-B_1 על הצלעות BC ו-AC בהתאמה. תהיינה P ו-Q נקודות על AA_1 ו-BB_1 בהתאמה, כך ש-PQ מקביל ל-AB. תהי P_1 נקודה על הישר PB_1 כך ש-B_1 בין P ל-P_1, וגם $\angle PP_1C = \angle BAC$. בדומה, תהי Q_1 נקודה על הישר QA_1 כך ש-A_1 בין Q ל-Q_1, וגם $\angle CQ_1Q = \angle CBA$. הוכיחו שהנקודות P, Q, P_1, Q_1 נמצאות על מעגל אחד.

בתיאבון!