קומבי

1. נתון גרף קשיר עם 2025 קודקודים. הוכיחו כי ניתן לצבוע את קודקודי הגרף ב-70 צבעים כך שכל קליקה שקודקודיה באותם צבע מוכלת בקליקה גדולה יותר.

2. נתון גרף עם 1024 קודקודים שממוספרים מ-0 עד 1023. שני קודקודים מחוברים בקשת אם ורק אם הייצוג הבינארי של המספר שלהם נבדל במקום אחד בדיוק. 9 קשתות נמחקו מהגרף, הוכיחו כי קיים מסלול המילטון בגרף (מסלול שעובר בכל קודקוד פעם אחת בדיוק).

3. נתון לוח משבצות בגודל $(a+b+1)\times(a+b+1)$ כל משבצת צבועה באדום או בז'. ידוע שיש לפחות a^2+ab-b משבצות אדומות ולפחות b^2+ab-a משבצות בז'. הוכיחו כי ניתן להעמיד על הלוח $a+b$ צריחים שלא מאיימים זה על זה כך שבדיוק a מתוכם יהיו על משבצות אדומות.

4. נתונות n נקודות במישור. נבנה גרף מכוון שהקודקודים שלו בנקודות המסומנות וכל נקודה מצביעה על הנקודה הקרובה ביותר אליה (אם יש שתיים הכי קרובות אז בוחרים אחת באקראי). נתון שאם נשכח מכיווני הקשתות, הגרף שיתקבל יהיה קשיר. הוכיחו כי בגרף יש לפחות $\frac{n-2}{4}$ קודקודים עם דרגת כניסה חיובית.

5. במעגל יושבים n אנשים. בכל מהלך ניתן להחליף שני אנשים שכנים. תוך כמה החלפות ניתן לעבור למצב שבו כל שני אנשים שישבו זה על יד זה בהתחלה ישבו זה על יד השני, אך בסדר הפוך?

6. לוח משולשי עם צלע באורך n הוא משולש משוכלל שמחולק ל-n^2 משולשים משוכללים עם צלע באורך 1. הוכיחו כי לכל $c>0$ קיים n עבורו ניתן לצבוע cn קודקודים של לוח משולשי מגודל n, כך שאף שלוש נקודות צבועות לא יוצרות משולש משוכלל, כאשר:
א. הצלעות חייבות להקביל לצלעות הלוח.
ב. הצלעות לא חייבות להקביל לצלעות הלוח.

7. גמל צובע משבצות על לוח $n\times n$ כך שאין שלוש משבצות צבועות ברצף (אופקי מאונך או באלכסון). מה הערך המקסימלי d עבורו ברווז יכול לצבוע לפחות dn^2 משבצות לכל n?

8. משפחה $\mathcal{F}$ של תתי קבוצות של $\{1, \dots, n\}$ תקרא טובה אם לכל $A, B, C, D \in \mathcal{F}$ מתקיים ש-$|A \cup B \cup C \cup D| \leq n - 2$. מה הוא הגודל המקסימלי של משפחה טובה?

9. על ציר המספרים בנקודות $1, 2, \dots, n$ נמצאים חניונים. יש n מכוניות שונות שמעמידים בחניונים, מכונית אחת בכל חניון. הכבישים בין החניונים לא תקינים. המרחק בין שתי הצבות שונות של מוכניות הוא אורך הכביש המינימלי שצריך לתקן בשביל שכל מכונית תצליח להגיע מהחניון שלה במצב הראשון לחניון שלה במצב השני.
הראו שלכל $\alpha < 1$ קיים n ו-100^n מצבים שונים שהמרחק בין כל שניים הוא לפחות αn.

10. יש 60 קופסאות ריקות ממוספרות $B_1, \dots, B_{60}$ בשורה, ויש ערימה אינסופית של גולות. איילה וברווז משחקים משחק. בהתחלה נתון n .
איילה מחלקת n גולות בקופסאות כרצונה. כל סיבוב במשחק מורכב משני שלבים.
ברווז בוחר מספר $59 \geq k \geq 1$ ומחלק את הקופסאות לקבוצות $B_1, \dots, B_k$ ו $B_{k+1}, \dots, B_{60}$.
לאחר מכן איילה בוחרת קבוצה ומוסיפה לכל קופסא בה גולה ומהקבוצה השנייה היא לוקחת גולה מכל קופסא.
ברווז מנצח אם בשלב כלשהו יש קופסא ריקה. מה הערך המינימלי של n עבורו איילה יכולה למנוע מברווז ניצחון?