חשבון זוויות

IMO 1.

1.1 M היא אמצע צלע BC במשולש ABC ו-BE, CF הם גבהים במשולש. חוצי הזוויות של $\angle BAC$ ו-$\angle EMF$ נפגשים בנקודה R. הוכיחו כי המעגלים BFR, CER נחתכים שנית בנקודה על הצלע BC.

1.2 על הצלע BC נבחרה נקודה W. BE, CF הם גבהים במשולש ו-H הוא מפגש הגבהים. תהי X הנקודה הנגדית ל-W על המעגל החוסם של BFW ובאופן דומה Y הנגדית ל-W על המעגל החוסם של CEW. הוכיחו כי X, Y, H נמצאות על ישר.

1.3 על האלכסון AC של מרובע חסום $ABCD$ נתונה נקודה E כך ש-$BC = CE, AE = AD$. המעגל החוסם של BDE נחתך עם AC בנקודות E, F ומרכזו יסומן M. הוכיחו כי FM, AD, BC נפגשים בנקודה.

1.4 יהי מרובע $ABCD$ החסום במעגל ויהי מעגל Ω שמרכזו O, עובר ב-B, D וחותך שנית את הישרים AB, BC בנקודות E, F. נסמן ב-H את מפגש הגבהים במשולש DEF. נתון שהישרים EF, AC ו-DO נפגשים בנקודה. הוכיחו כי המשולשים EFH ו-ABC דומים.

1.5 נתון טרפז $ABCD$, $AD||BC$. אלכסוני הטרפז נחתכים בנקודה P. תהי Q נקודה בין בסיסי הטרפז כך ש-$\angle AQD = \angle CQB$ ו-CD מפריד בין P ל-Q.
הוכיחו כי $\angle BQP = \angle DAQ$.

1.6 נתונים שני מעגלים ω_1, ω_2 שנחתכים בנקודות A, B. תהי C נקודה על המשיק ל-ω_1 ב-A כך ש-$\angle CBA = 90°$. ישר l עובר דרך C ונחתך עם ω_2 בנקודות P, Q. הישרים PA, QA נחתכים עם ω_1 שנית בנקודות X, Y. נסמן את עקב האנך מ-A ל-l ב-Z. הוכיחו כי X, Y, Z נמצאות על ישר אחד.

IMO 2.

2.1 על הצלעות AB, AC של משולש ABC נבחרו נקודות D, E כך ש-$BCED$ חסום במעגל. הקטעים BE, CD נפגשים בנקודה F. נסמן ב-I את מרכז המעגל החסום ב-ADE וב-J את מרכז המעגל החסום ב-FDE. הוכיחו כי הישר IJ עובר באמצע הקשת הקטנה $\overset{\frown}{DE}$ במעגל $BCED$.

2.2 יהי משולש ABC ומעגל ω שמשיק לצלעות AB, AC בנקודות D, E בהתאמה כך ש-$BD + CE < BC$. על הצלע BC נבחרו נקודות F, G כך ש-$BF = BD, CG = CE$. הקטעים DG ו-EF נפגשים בנקודה K. נסמן ב-N את הנקודה על הקשת $\overset{\frown}{DE}$ של ω כך שהמשיק ב-N ל-ω מקביל ל-BC. הוכיחו כי מרכז המעגל החסום ב-ABC נמצא על הישר KN.

2.3 משולש ABC חסום במעגל Ω שמרכזו O. תהי E נקודה על הצלע BC כך ש-OE מקביל לחוצה הזווית של $\angle BAC$ ותהי D נקודה על חוצה זווית זה כך ש-$\angle DEB$ ישרה. תהי K נקודה על הקרן EB כך ש-$EK = EA$. המעגל AKD נחתך עם BC בנקודות K, P ועם Ω בנקודות A, Q. הוכיחו כי PQ משיק ל-Ω.

2.4 יהי משולש ABC ו-I, I_A מרכזי המעגל החסום והמעגל החסום מבחוץ במשולש. נסמן ב-N את אמצע הקשת $\widehat{BAC}$. AI נחתך עם BN, CN בנקודות X, Y. A' זו הנקודה הנגדית ל-A על המעגל החסום של ABC. הוכיחו כי המעגלים $IA'I_A$ ו-NXY משיקים.

IMO 3.

3.1 מרכז המעגל החסום ב-ABC יסומן ב-I ומרכז המעגל החוסם ב-O. BD, CE הם חוצי הזוויות במשולש ו-S היא אמצע הקשת $\widehat{BC}$ במעגל החוסם. האנכים האמצעים של BD, CE נפגשים בנקודה V. תהי X נקודה על האנך האמצעי של OS המקיימת ש-$XO \perp SV$. הוכיחו כי $XA = XI$.

3.2 H הוא מפגש הגבהים במשולש ABC. נסמן ב-B' את השיקוף של B ביחס לAC- וב-C' את השיקוף של C ביחס ל-AB. הישרים BC ו-$B'C'$ נחתכים בנקודה T. המשיקים למעגל החוסם של ABC ב-B, C נחתכים בנקודה X. הוכיחו כי HX מאונך ל-AT.

בתאבון!