אי שוויונים טרנסצנדנטיים

1. א) יהי $x > -1$ ו- $\alpha \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.
הוכיחו כי: $(1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x$.
ב) יהי $x > -1$ ו- $0 < \alpha < 1$. הוכיחו כי $(1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x$.

2. יהי $a > 0$, $b \geq 1$ ו- $c \geq 1$. הוכיחו כי: $c \cdot a^b + b^c \geq 1 + abc$.

3. יהי $a > 0$ ו- $c \geq b > 0$. הוכיחו כי: $a^b(a+b)^c > c^b a^c$.

4. עבור כל x ו- y חיוביים הוכיחו כי: $\left(\frac{x+1}{y+1}\right)^{y+1} \leq \left(\frac{x}{y}\right)^y$.

5. יהי x, y ו- z מספרים חיוביים. הוכיחו כי: א) $x^y + y^x > 1$
ב) $(x+y)^z + (x+z)^y + (y+z)^x > 2$ ג) $x^{y+z} + y^{x+z} + z^{x+y} \geq 1$.

6. יהי x ו- y מספרים חיוביים שסכומם שווה ל- 1.
הוכיחו כי: $(2x)^{\frac{1}{x}} + (2y)^{\frac{1}{y}} \leq 2$

7. יהי a, b ו- c מספרים חיוביים. הוכיחו כי:
א) $a^a + b^b \geq a^b + b^a$ ב) $a^a + b^b + c^c \geq a^b + b^c + c^a$.

8. יהי $x > 0$. הוכיחו כי: $x^x \geq \frac{1}{2}(x^3 - x^2 + x + 1)$.

9. יהי $a > 0$ ו- $b > 0$ כך ש- $a + b = 2$.
הוכיחו כי: $a^a + b^b + 2ab \geq 4$.

10. יהי a, b ו- c מספרים חיוביים עבורם $abc = 1$. הוכיחו כי:
$$a^{a-1} + b^{b-1} + c^{c-1} + 1 \geq \frac{4}{3}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$
.

11. יהי $x > y > 0$. הוכיחו כי: $x^{y^x} > y^{x^y}$