14.6.2020 מבחן לרותם כ"ב בסיוון תש"ף

1. קבוצה S של מספרים שלמים תקרא **<u>שורשנית</u>** אם לכל שלם חיובי n ולכל $a_0, \dots, a_n \in S$, כל השורשים השלמים של הפולינום $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ גם שייכים ל-S. מצאו את כל הקבוצות השורשניות אשר מכילות את כל המספרים מהצורה $2^a - 2^b$ עבור a, b שלמים חיוביים.

2. המלך ארתור בונה את הטירה קמלוט $\mathcal{C}$ במישור האוקלידי. הטירה מורכבת מ-n קירות, שכל אחד מהם הינו ישר אינסופי, אף שני קירות אינם מקבילים זה לזה, ואף שלושה קירות לא נחתכים בנקודה אחת. השטחים (אולי אינסופיים) התחומים בין הקירות הם חדרי הטירה.

לאחר בניית הטירה, הקוסם מרלין צובע את קירותיה בצבעים אדום וכחול, כך שבכל קיר צד אחד צבוע כולו באדום והצד השני צבוע כולו בכחול (מרלין בוחר לכל קיר איזה מהצדדים יהיה צבוע באיזה צבע).

לאחר הצביעה, בנקודת החיתוך של כל שני קירות יש 4 פינות של חדרים: פינה אחת בה נפגשים שני קירות אדומים, פינה אחת בה נפגשים שני קירות כחולים, ושתי פינות נגדיות בהן נפגשים קיר אדום וקיר כחול. בכל נקודת חיתוך, מרלין מתקין דלת המחברת בין שני החדרים בשתי הפינות הנגדיות בהן נפגשים קיר אדום עם כחול.

לאחר התקנת הדלתות, המכשפה מורגנה כולאת חלק מאבירי השולחן העגול בחדרי הטירה לבחירתה. האבירים יכולים לעבור בין החדרים באמצעות הדלתות, אך לא דרך קירות. אם שני אבירים נפגשים, הם יכולים לאחד כוחות ולהביס את מורגנה.

מורגנה שואפת לכלוא כמות גדולה ביותר של אבירים כך שלא יוכלו להביס אותה. מרלין שואף לצבוע את הקירות כך שכמות האבירים שמורגנה תוכל לכלוא תהיה קטנה ביותר. לארתור אין שאיפות.

עבור טירה נתונה $\mathcal{C}$, נסמן ב-$k(\mathcal{C})$ את המספר הגדול ביותר k, עבורו לכל צביעה אפשרית של קירות הטירה על ידי מרלין, מורגנה תוכל לכלוא לפחות k אבירים בתוך הטירה מבלי שיביסו אותה. עבור n נתון, מצאו את כל הערכים האפשריים של $k(\mathcal{C})$, כאשר $\mathcal{C}$ טירה כלשהי עם n קירות.

3. תהא $\mathbb{Z}$ קבוצת השלמים. פונקציה $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ תקרא **מגניבה** אם לכל x, y שלמים מתקיים

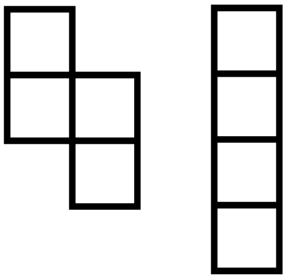
$$f(f(x+y)+y) = f(f(x)+y).$$

עבור פונקציה מגניבה f, נאמר ששלם v הוא **f-נדיר** אם הקבוצה $X_v = \{x \in \mathbb{Z} : f(x) = v\}$ היא סופית ולא ריקה.

(א) הוכיחו כי קיימת פונקציה מגניבה f עבורה קיים לפחות שלם f-נדיר אחד.
(ב) הוכיחו כי לכל פונקציה מגניבה f יש לכל היותר שלם אחד שהוא f-נדיר.

בהצלחה!

14.6.2020 מבחן לירדן כ"ב בסיוון תש"ף



1. יש לנו כמות בלתי מוגבלת של מרצפות משני הסוגים שמופיעים בציור (מותר לסובב ולשקף). אילו מלבנים $m\times n$ אפשר לרצף עם מרצפות אלו?

2. למספר טבעי N ישנם d מחלקים. סכומי הספרות שלהם הם $1,\ldots,d$ בסדר כלשהו. האם יתכן כי N פריק?

3. נתונים 3 מעגלים α,β ו- γ שכל שניים מהם משיקים מבחוץ: α משיק ל-β בנקודה N, γ משיק ל-α בנקודה M ול-β בנקודה K. נתונות גם שש נקודות נוספות: נקודות A ו-D על α, B ו-E על β, C ו-F על γ, כך שבכל אחת מהשלישיות

(A,N,B), (B,K,C), (C,M,D), (D,N,E), (E,K,F), (F,M,A)

שלוש הנקודות נמצאות על ישר אחד ושונות זו מזו. הראו כי 3 הישרים שמכילים שלישיות בצבע אדום נפגשים בנקודה אחת, וגם ש-3 הישרים שמכילים שלישיות בצבע כחול נפגשים בנקודה אחת.

4. מספרים אי-שליליים a,b,c מקיימים $ab+bc+ca=1$. מצאו את הקבוע K הקטן ביותר כך שבהכרח מתקיים:

$$\frac{2+abc+\sqrt{a^2+b^2+c^2+2}}{a+b+c+3}+K\left(a+b+c+3\right)^2\geq 4+2\left(a+b+c\right)$$

בהצלחה!

מבחן לרותם כ"ד בסיוון תש"ף 16.6.2020

שאלה 1. נתון אוסף של n משקולות, שמשקליהן הם מספרים ממשיים $x_1, \dots, x_n$, כולם גדולים או שווים ל-1, וסכום כל המשקלים הוא $2n$. הוכיחו כי לכל מספר ממשי r עם $0 \le r \le 2n-2$ ניתן לבחור תת-אוסף של המשקולות כך שמשקלן הכולל הוא לפחות r ולכל היותר $r+2$.

שאלה 2. תהא $\mathbb{Z}_{>0}$ קבוצת השלמים החיוביים. נתון שלם חיובי קבוע C. מצאו את כל הפונקציות $f: \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ עבורן לכל a, b שלמים חיוביים עם $a+b > C$ מתקיים

$$a + f(b) \mid a^2 + bf(a).$$

שאלה 3. יהא ABC משולש חד זוויות, ויהא I מרכז המעגל החסום בו. נסמן ב-D, E ו-F את נקודות ההשקה של המעגל החסום ב-ABC עם הצלעות BC, CA ו-AB, בהתאמה. נסמן ב-P ו-Q את נקודות החיתוך של הישר EF עם המעגל החוסם של ABC, כך ש-F נמצאת בין P ל-E. הוכיחו כי

$$\sphericalangle DPA + \sphericalangle AQD = \sphericalangle QIP.$$

בהצלחה!

16.6.2020 מבחן לירדן כ"ד בסיוון תש"ף

1. מצאו את המספר השלם הכי גדול S כך שלכל פולינום לא קבוע עם מקדמים שלמים $p(x)$ המונה של שבר מצומצם $p(10)-p\left(\frac{1}{10}\right)=\frac{a}{b}$ מתחלק ב- S.

2. מחומש $A_1A_2A_3A_4A_5$ שווה צלעות אבל לאו דווקא משוכלל. נסמן גם $A_6=A_1$. מעגל ω חותך כל קטע A_iA_{i+1} בשתי נקודות שונות B_i ו- C_i לכל $1\le i\le 5$. נתון בנוסף כי $\sum_{i=1}^{5}A_iB_i=\sum_{i=1}^{5}B_iA_{i+1}$. הראו כי $\sum_{i=1}^{5}A_iC_i=\sum_{i=1}^{5}C_iA_{i+1}$.

3. בחפיסה N כרטיסים (כולם בצבעים שונים). על כל כרטיס רשום מספר טבעי דו ספרתי. גנדלף טוען שאם ניצן יבחר כמה כרטיסים מהחפיסה ויגיד לו את סכום המספרים, הוא יוכל להגיד איזה כרטיסים בדיוק ניצן בחר.

א. האם יכול להיות ש- $N=7$?

ב. האם יכול להיות ש- $N=10$?

4. מספרים שלמים $1\le a,b,c,d\le n$ מקיימים $ad\ne bc$. הראו כי

$$\frac{1}{30\cdot n^3}<\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}-\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$$

בהצלחה!