פתרונות

1.
   - $x < -1$. אגף שמאל אינו שלם ואין פתרון.
   - $x = -1$. מקבלים $y^2 = 2$ ואין פתרון.
   - $x = 0$. מקבלים $y^2 = 4$ והפתרונות הם $\mathbf{(0, 2)}, \mathbf{(0, -2)}$.
   - $x = 1, 2$. אין פתרון.
   - $x \geq 3$. בה"כ $y \geq 0$, כלומר $y \geq 2$. מקבלים $2^x(2^{x+1} + 1) = (y-1)(y+1)$. היות ש־$\gcd(y-1, y+1) \mid 2$, 2^{x-1} מחלק את $y-1$ או $y+1$. לכן $y = 2^{x-1}q + \varepsilon$, כאשר $\varepsilon = \pm 1$. מקבלים $2^{x+1} + 1 = q(2^{x-2}q + \varepsilon)$.
     - $\varepsilon = 1$. אז $2^{x+1} + 1 = q(2^{x-2}q + 1) > 2^{x-2}q^2$ ולכן $q \leq 2$. אין פתרון.
     - $\varepsilon = -1$. אז $2^{x+1} + 1 = q(2^{x-2}q - 1) > 2^{x-3}q^2$ ולכן $q \leq 4$. אז $q = 3$ ומקבלים $x = 4$ ו־$y = 23$. הפתרונות הם $\mathbf{(4, 23)}, \mathbf{(4, -23)}$.

2. מודולו 3 מקבלים שבהכרח p או q מתחלק ב־3.

   - $p = 3$. אז $3 + q = (3 - q)^r$. אז $q = 2, 3$ אינם פתרונות, לכן $3 - q < 0$ ולכן r זוגי, כלומר $r = 2$. נקבל $q + 3 = q^2 - 6q + 9$, או $q^2 - 7q + 6 = (q-1)(q-6) = 0$, ואין פתרון.
   - $q = 3$. אז $p + 3 = (p-3)^r$. אז $p = 2, 3$ אינם פתרונות, לכן $p \geq 5$ ולכן $p + 3 \leq 4(p-3)$. מכאן $(p-3)^{r-1} \leq 4$, כלומר $p = 5, r = 3$ או $p = 7, r = 2$. רק הראשון עובד, ולכן הפתרון הוא $\mathbf{(5, 3, 3)}$.

3. בה"כ $p \leq q, r$. $q^r \equiv -1 \pmod{p}$ ולכן $\mathrm{ord}_p(q)$ מחלק את $2r$ ולא את r. כלומר $\mathrm{ord}_p(q) \in \{2, 2r\}$. בנוסף, $\mathrm{ord}_p(q) \mid p-1$ ולכן $\mathrm{ord}_p(q) = 2$. כלומר $p \mid q+1$.

   באופן דומה, $\mathrm{ord}_q(r) \in \{2, 2q\} \mid r-1$ ו־$\mathrm{ord}_r(p) \in \{2, 2q\}$. מכאן שיש ארבעה מקרים:

   - $\mathrm{ord}_q(r) = 2,\ \mathrm{ord}_r(p) = 2$. אז $q \mid r+1$ ו־$r \mid p+1$. היות ש־$r \geq p$, בהכרח $r = p+1$ ואז $p = 2, r = 3$. ואז $4 \mid q$ כלומר $q = 2$, ואין פתרון.
   - $\mathrm{ord}_q(r) = 2,\ \mathrm{ord}_r(p) = 2q$. אז $q \mid r+1$ ו־$2q \mid r-1$. מכאן $2 \mid q$, כלומר $q = 2$ בסתירה ל־$\mathrm{ord}_q(r) = 2$.
   - $\mathrm{ord}_q(r) = 2p,\ \mathrm{ord}_r(p) = 2$. אז $2p \mid q-1$ ו־$r \mid p+1$. כמו קודם $p = 2, r = 3$. כעת $q \mid r^2 + 1 = 10$ ולכן $q = 5$. $\mathbf{(2, 5, 3)}$ הוא אכן פתרון.
   - $\mathrm{ord}_q(r) = 2p,\ \mathrm{ord}_r(p) = 2q$. אז $2p \mid q-1$ ו־$2q \mid r-1$. ולכן $p \mid q \pm 1$. לכן $p = 2$. ומכאן $\mathrm{ord}_q(r) = 4 \mid r^2 + 1$. היות ש־$q \mid r^2 + r$, נקבל $q \mid r-1$. אבל $q \neq r$ (כי $q \mid r-1$) ולכן $q \mid r+1$. אז $2 \mid q$. לכן $q = 2$ ואז $r = 5$ ואין פתרון.

   הפתרונות הם $\mathbf{(2, 5, 3)}, \mathbf{(3, 2, 5)}, \mathbf{(5, 3, 2)}$.

4. יהי $n = \prod_p p^{4a_p}$. אז מספר המחלקים $(4a_2+1)(4a_3+1)...$ אי־זוגי, ולכן $a_2 = 0$. התנאי הוא $x_3x_5x_7x_{11}... = 1$ כאשר $x_p := \frac{4a_p+1}{p^{a_p}}$. ננתח את x_p.

- $p = 3$. אז $x_3 = \frac{5}{3}$ עבור $a_3 = 1$, $x_3 = 1$ עבור $a_3 = 0, 2$ ו־$x_3 < 1$ לפי א"ש ברנולי עבור $a_3 > 2$: $3^{a_3} = (1+8)^{a_3/2} > 1 + 4a_p$.
- $p = 5$. אז $x_5 = 1$ עבור $a_5 = 0, 1$, ו־$x_5 \le \frac{9}{25}$ לפי א"ש ברנולי עבור $a_5 \ge 2$: $5^{a_5} = (1+24)^{a_5/2} \ge 1 + 12a_5 \ge \frac{25}{9}(1+4a_5)$.
- $p > 5$. אז $x_p = 1$ עבור $a_p = 0$, $x_p < 1$ עבור $a_p = 1$ ו־$x_p < \frac{9}{25}$ לפי א"ש ברנולי עבור $a_p > 1$: $p^{a_p} > 5^{a_p} > 12a_p + 1$.

כעת יש שני מקרים:

- $a_3 \ne 1$. אז $x_p \le 1$ לכל p ולכן $x_p = 1$ לכל p. כלומר $a_3 = 0, 2$, $a_5 = 0, 1$ ו־$a_7 = a_{11} = ... = 0$. לכן n הוא החזקה הרביעית של $1, 3^2, 5, 3^2 \cdot 5$.
- $a_3 = 1$. אז 3 מחלק את $n = 5^4(4a_5+1)^4(4a_7+1)^4...$. לכן עבור ראשוני כלשהו $q \ge 5$ מתקיים $a_q \ge 2$, ואז $x_q \le \frac{9}{25}$. אבל אז $x_3x_5x_7x_{11}... \le \frac{5}{3} \cdot \frac{9}{25} < 1$, בסתירה.

הפתרונות הם $\mathbf{1,\ 3^8,\ 5^4,\ 3^8 \cdot 5^4}$.

5. בה"כ $a \le b \le c$. נסמן $bc - a = 2^n,\ ca - b = 2^m,\ ab - c = 2^k$ כאשר $k \le m \le n$. בבירור $a \ge 2$. אז

$$(c-1)(b+a) = 2^n + 2^m$$
$$(c+1)(b-a) = 2^n - 2^m$$

ואחד מבין $c-1,\ c+1$ לא מתחלק ב־4. לכן:

- $2^{m-1} \mid b - a$.
  - $a = 2$. נטפל אחר־כך.
  - $a \ge 3$. אז $b - a < c \le 2^m/(a-1) \le 2^{m-1}$, ולכן $b - a = 0$. כלומר $a = b$, ונטפל בזה בסוף.
- $2^{m-1} \mid b + a$.
  - $a = 2$. נטפל אחר־כך.
  - $3 \le a = b$. נטפל בסוף.
  - $3 \le a < b$. אז $b + a < 2c \le 2^{m+1}/(a-1) \le 2^m$.
    - $b + a = 2^{m-1}$. אז $a \le 4$.
      - $a = 4$. אז $b = 2^{m-1} - 4$ ו־$4c - b = 2^m$, כלומר $c = 3 \cdot 2^{m-3} - 1$. אבל $b \le c$ גורר $2^{m-3} \le 3$, ואילו $a < b$ גורר $2^{m-3} > 2$, לכן אין פתרון (במקרה $a = b$ נטפל בסוף).
      - $a = 3$. אז $b = 2^{m-1} - 3$ וכן $b = \frac{1}{8}\left[3(3b-c) + (3c-b)\right] = 2^{k-3} + 2^{m-3}$. לכן $3 \cdot 2^{k-3} + 2^{m-3} = 2^{m-3} + 1 = 2^{k-3}$ ומכאן $k = 3, m = 4$. הפתרון הוא $\mathbf{(3,5,7)}$.
- $a = 2$.
  - $n = 1$. אז $bc = 4$ ולכן $b = c = 2$ ומקבלים $\mathbf{(2,2,2)}$.
  - $n \ge 2$. אז $bc = 2^n + 2 \equiv 2 \pmod 4$. אבל $b = 2^m - 2c$ זוגי, לכן c אי־זוגי. אז $2^k = 2b - c$ אי־זוגי ולכן $k = 0$. אז $b = \frac{1}{3}(2^m + 2),\ c = \frac{1}{3}(2^{m+1} + 1)$ ו־

$$(2^{m-1}+1)(2^{m+1}+1) = \frac{9}{2}bc = 9(2^{n-1}+1)$$

מכאן ש־$1 \equiv 9 \pmod{2^{m-1}}$ ולכן $m \le 4$. משיקולי מודולו 3, m זוגי, ולכן:

* $m=2$. אז $b=2,\ c=3$. מקבלים $\mathbf{(2,2,3)}$.
* $m=4$. אז $b=6,\ c=11$. מקבלים $\mathbf{(2,6,11)}$.

- $3\le a=b$. אז $a(c-1)=2^n$, כלומר c אי־זוגי, ואז $2^k=a^2-c$ אי־זוגי ולכן $a^2-c=1$. אז $c-1$ הוא חזקת 2 וגם $c+1=a^2$ הוא חזקת 2, ולכן $c=3$. אבל $a=b=c=3$ אינו פתרון.

הפתרונות הם כל התמורות של השלשות הנ"ל.

6. ממודולו 3, $z=2c$. כמו כן $t=2d$: אחרת, אם $x\ge 2$ ממודולו 4 מקבלים סתירה, ואם $x=1$ אז ממודולו 24 מקבלים ש־y אי־זוגי ואז ממודולו 5 מקבלים סתירה. כעת המשוואה היא:

$$2^x\cdot 3^y=\left(7^d-5^c\right)\left(7^d+5^c\right)$$

הואיל ו־$2=\gcd\left(7^d-5^c,7^d+5^c\right)$, יש שלושה מקרים:

- $7^d-5^c=2^{x-1},\ 7^d+5^c=2\cdot 3^y$. אז $7^d=2^{x-2}+3^y$ ואז ממודולו 3, $x=2a+2$ עם $a\ge 1$ (אחרת $7^d=1+3^y$). קיבלנו $7^d-5^c=2\cdot 4^a$. ממודולו 4 נקבל $d=2e$, ואז ממודולו 8, $c=2f$. כעת ממודולו 3 מקבלים $2\equiv 0$ בסתירה, ולכן אין פתרון.
- $7^d-5^c=2\cdot 3^y,\ 7^d+5^c=2^{x-1}$. אז $x\ge 5$. ממודולו 4 נקבל $d=2e+1$ ובהכרח $e\ge 1$. כמו קודם ממודולו 3 נקבל $x=2a+2$ עם $a\ge 2$ (כי $x\ge 5$). קיבלנו $7\cdot 49^e=4^a+3^y$. ממודולו 8 מקבלים $7\equiv 3^y$ בסתירה, ולכן אין פתרון.
- $7^d-5^c=2,\ 7^d+5^c=2^{x-1}\cdot 3^y$. מ־$7^d=5^c+2$ מודולו 5 מקבלים ש־$d=4k+1$.
  - $c\ge 2$. אז מודולו 25 נקבל $7\equiv 2$ בסתירה.
  - $c=1$. אז $d=1$ ונקבל את הפתרון $\mathbf{(3,1,2,2)}$.