23/9/2019 **מחנה סתיו** כ"ג באלול תשע"ט

קבוצת ירדן

אין להשתמש במחשבון

1. פתרו את מערכת המשוואות

$$\begin{cases} a^3+8b^3=2240 \\ ab(a+2b)=960 \end{cases}$$

2. ליאור מקבל 5 מספרים ממשיים ומחשב את הסכום של כל זוג מספרים מביניהם. האם ייתכן כי עשרת הסכומים שהתקבלו הם 10 מספרים שלמים עוקבים?

3. כפיר ולוטרה משחקים בתורות על לוח משבצות בגודל 100×100. בתחילת המשחק כל המשבצות לבנות. בכל מהלך שלו, כפיר יכול לצבוע בכחול 5 משבצות עוקבות בשורה או בעמודה (כלומר מלבן בגודל 1×5 או 5×1). בכל מהלך שלה, לוטרה צובעת בלבן משבצת אחת. לכל אחד מהשחקנים מותר לצבוע גם משבצות שכבר צבועות. מהו המספר N הגדול ביותר עבורו כפיר יוכל לדאוג לכך שיהיו N משבצות כחולות בשלב מסוים?

4. נתון מצולע משוכלל $A_1A_2A_3...A_n$ עם צלעות באורך 1. אמצעי הצלעות שלו יוצרים מצולע משוכלל $B_1B_2B_3...B_n$. הוכיחו שההפרש בין שטחי שני המצולעים קטן מ-$\frac{\pi}{4}$.

5. האם קיימים 5780 מספרים שלמים אי-שליליים שלא ניתן לייצג אותם בצורה של $a^4+b^4+c^4+d^4+4^e+4^f+4^g$ כאשר a,b,c,d,e,f,g מספרים שלמים אי-שליליים?

בהצלחה!

כ"ג באלול תשע"ט **מחנה סתיו** 23/9/2019

קבוצת רותם

אין להשתמש במחשבון

1. ליאור מקבל 9 מספרים ממשיים ומחשב את הסכום של כל שלושה מספרים מביניהם. האם ייתכן שהתקבלו 84 מספרים שלמים עוקבים?

2. האם קיימים 5780 מספרים שלמים חיוביים שלא ניתן לייצג אותם בצורה של $a^4+b^4+c^4+d^4+4^e+4^f+4^g$ כאשר a,b,c,d,e,f,g מספרים שלמים?

3. על הצלעות של מלבן ABCD נבחרו שתי נקודות: N שהיא האמצע של BC, ונקודה M על AD שהיא לא אמצע הצלע. נקודה נוספת E נמצאת על המעגל שעובר דרך N, A, D. נקודות U ו-V הן עקבי האנכים מ-C לישרים EA ו-ED. נקודות I ו-J הן עקבי האנכים מ-M ל-EA ו-ED. לאיזה משולש יש שטח גדול יותר: למשולש JIM או משולש VUD?

4. נתונים פולינומים p_1,p_2,p_3,p_4,p_5 ממעלה d עם מקדמים ממשיים. לכל חמישייה של מספרים a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 שכולם שונים מ-0, קיים x ממשי כך ש-$a_i\cdot p_i(x)>0$ לכל $i=1,2,...,5$. עבור איזה d זה אפשרי?

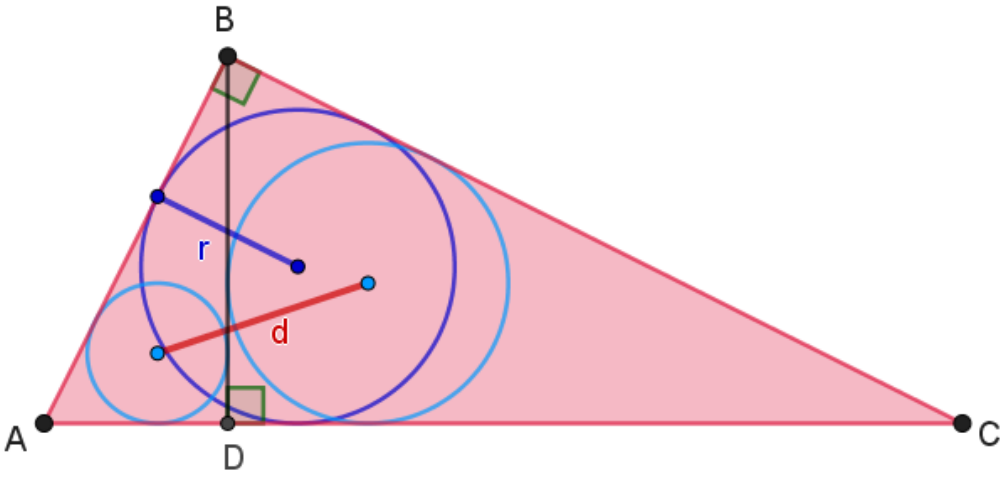
בהצלחה!

כ"ד באלול תשע"ט **מחנה סתיו** 24/9/2019

קבוצת ירדן

אין להשתמש במחשבון

1. במשולש ABC הזווית B ישרה, ו-BD הוא גובה. רדיוס המעגל החסום במשולש ABC הוא r. המרחק בין מרכזי המעגלים החסומים במשולשים BAD ו-BCD הוא d. מצאו את $\frac{d}{r}$.



2. מצאו את כל המספרים הטבעיים n, כך שבריישום העשרוני של $n(n+10)$ כל הספרות הן תשיעיות.

3.

4. האם קיימים מספרים שלמים חיוביים שונים בזוגות $x_1, x_2, ..., x_{5780}$, ותמורה שלהם $y_1, y_2, ..., y_{5780}$, כך ש-x_i זר ל-y_i לכל i, והמספר $\frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + ... + \frac{x_{5780}}{y_{5780}}$ הוא שלם?

בהצלחה!

24/9/2019 **מחנה סתיו** כ"ד באלול תשע"ט

קבוצת רותם

אין להשתמש במחשבון

1. נסמן ב-$\overline{ab}$ את $10a+b$, כאשר a,b הן ספרות (מתוך $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$). תום מגריל 3 ספרות שונות בזוגות a,b,c. מה הסיכוי ש-$\overline{ab}\cdot\overline{bc}\cdot\overline{ca}-\overline{ba}\cdot\overline{cb}\cdot\overline{ac}$ מתחלק ב-100?

2. נתון משולש ABC. נקודות P ו-Q נבחרו כך ש-ABPC, AQBC מקביליות. יהא Ω המעגל החוסם של APQ, ומרכזו O. הישר CP פוגש את Ω שנית ב-D. נתונה נקודה K על הישר BC עבורה B בין K ל-C והזווית AKO ישרה. הראו כי הנקודות Q, K, O ו-D נמצאות על מעגל אחד.

3. *n*-ומינו הוא צורה קשירה המורכבת מ-*n* משבצות. נתון לוח משבצות אינסופי. עבור אילו ערכי *n* שלם חיובי קיים *n*-ומינו וקיימת צביעה של לוח המשבצות בשחור ובלבן, כך שבכל דרך שנניח את ה-*n*-ומינו על הלוח הוא יכסה מספר זוגי של משבצות שחורות, אך בכל דרך שנניח את תמונת המראה שלו על הלוח היא תכסה מספר אי-זוגי של משבצות שחורות?

ניתן להזיז את הצורות ולסובב אותן בכפולות של 90°, אך לא לשקף.

בהצלחה!