חישוב גאומטרי

1. יהי α ריבוע אשר חסום במעגל ω. יהי β ריבוע אשר אחת מצלעותיו מוכלת בצלע של α והנקודות שלו אשר אינן נמצאות על הישר AB נמצאות על ω. מצאו את יחס הצלעות של α ו-β.

2. יהי ABC משולש ויהי ω המעגל החסום שלו. נסמן ב-D_1, E_1 את נקודות ההשקה של ω עם הצלעות BC, AC בהתאמה. יהיו D_2, E_2 נקודות ההשקה של המעגלים החסומים מבחוץ לצלעות BC, AC בהתאמה. נסמן ב-N את נקודת החיתוך של הישרים AD_2 ו-BE_2. המעגל ω חותך את הקטע AD_2 ב-2 נקודות, נסמן את הקרובה יותר ל-A ב-Q. הוכיחו כי $AQ = D_2N$.

3. נתבונן על מרכזי המעגלים החסומים במשולש ABC, נסמנם I, I_A, I_B, I_C. נסמן ב-R את רדיוס המעגל אשר חוסם את ABC. הביעו את $II_A^2 + I_BI_C^2$ באמצעות R.

4. נתון משולש ABC. נסתכל על המעגל החסום מבחוץ שמשיק לצלע BC. הוא חותך את המעגל החוסם של ABC ב-2 נקודות. תהי A' נקודת החיתוך של הישר אשר מחבר 2 נקודות אלו והישר BC. באופן דומה נגדיר את B', C'. הוכיחו כי הנקודות A', B', C' נמצאות על ישר אחד.

5. יהי $ABCD$ מרובע אשר אינו חסום במעגל. נסמן ב-d_A את דרגת הנקודה של A ביחס למעגל BCD. באופן דומה נגדיר את d_B, d_C, d_D. מצאו את $\frac{1}{d_A} + \frac{1}{d_B} + \frac{1}{d_C} + \frac{1}{d_D}$.

6. במשולש ABC מתקיים $AB = AC \neq BC$. מרכז המעגל החסום הוא I. הישר BI חותך את AC בנקודה D, והאנך ל-AC דרך D חותך את AI ב-E. הוכיחו כי השיקוף של I ביחס ל-AC נמצא על המעגל החוסם של המשולש BDE.

7. יהי ABC משולש בו מתקיים $AB = AC$. תהי D אמצע AC. חוצה זווית $\sphericalangle BAC$ חותך את המעגל DBC בנקודה E אשר נמצאת בתוך המשולש ABC. הישר BD חותך את המעגל AEB בשתי נקודות B, F. נסמן את נקודות החיתוך של AF, BE ב-I. הישרים CI ו-BD נחתכים בנקודה K. הראו כי I היא מרכז המעגל החסום של המשולש KAB.

בהצלחה!