תרגיל 9

1. בהנחה ש- $0 < a,b,c \le 2$ ובנוסף $abc = 1$, הוכיחו כי $ab + ac + bc \le 5$.

פתרון ראשון. נניח כי $a = \frac{2x}{x+1}$, $b = \frac{2y}{y+1}$, $c = \frac{2z}{z+1}$.

אז כאשר x חיובי, מקבלים $a \le 2$.

אז $(x+1)(y+1)(z+1) = 8xyz$.

צריך להוכיח כי $\sum_{cyc} \frac{4xy}{(x+1)(y+1)} \le 5$.

זאת אומרת כי $\sum_{cyc} 4xy(z+1) \le 5(x+1)(y+1)(z+1)$.

$$7xyz \le xy + xz + yz + 5(x+y+z) + 5$$

$$8xyz \le (x+1)(y+1)(z+1) + 4(x+y+z) + 4$$

וזה ברור מהזהות.

פתרון שני. בהינתן c, ננסה לבחור a ו- b כך ש- $ab = \frac{1}{c}$ אבל $ab + ac + bc$ יהיה גדול ככל האפשר. בשביל זה צריך ש- $a+b$ יהיה גדול ככל האפשר, וזה כאשר a ו- b רחוקים זה מזה ככל האפשר. כך ללא הגבלת הכלליות $a < b \le 2$, ואם נסמן $k = \frac{2}{b}$, אז אם נחליף את a ואת b במספרים $a' = \frac{a}{k}$, $b' = bk = 2$, אז

$$a' + b' = \frac{a}{k} + bk \ge a + b$$

הרי $b(k-1) \ge \frac{a}{k}(k-1)$ וזה ברור כי $k > 1$.

ובכן ניתן להניח כי $b = 2$. עכשיו נקבע את b ונשנה את a ואת c על מנת להגדיל את $ab + ac + bc$ ככל האפשר, ונקבל $c = 2$ ואז $a = \frac{1}{4}$.

במקרה זה $ab + ac + bc = 2 \cdot 2 + 2 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 5$.

2. הוכיחו כי לכל n טבעי ולכל x חיובי מתקיים $x^n + x^{-n} - 2 \geq n^2\left(x + x^{-1} - 2\right)$.

פתרון. במילים אחרות $\left(x^n - 1\right)\left(1 - x^{-n}\right) \geq n^2\left(x-1\right)\left(1 - x^{-1}\right)$.

$$\left(x-1\right)\left(1-x^{-1}\right)\left(x^{n-1} + \ldots + x^2 + x + 1\right)\left(1 + x^{-1} + \ldots + x^{1-n}\right) \geq n^2\left(x-1\right)\left(1-x^{-1}\right)$$

נחלק ב-$\left(x-1\right)\left(1-x^{-1}\right)$. זה מותר, כי $\frac{\left(x-1\right)^2}{x} > 0$. נקבל

$$\left(x^{n-1} + \ldots + x^2 + x + 1\right)\left(1 + x^{-1} + \ldots + x^{1-n}\right) \geq n^2$$

זה נובע מאי-שוויון הממוצעים:

$$\frac{x^{n-1} + \ldots + x^2 + x + 1}{n} \cdot \frac{1 + x^{-1} + x^{-2} + \ldots + x^{1-n}}{n} \geq$$
$$\geq \sqrt[n]{x^{n-1} \cdot \ldots \cdot x^2 \cdot x \cdot 1} \cdot \sqrt[n]{1 \cdot x^{-1} \cdot x^{-2} \cdot \ldots \cdot x^{1-n}} = 1$$

3. מספרים חיוביים a,b,c מקיימים $abc = 1$. הוכיחו כי

$$\frac{ab}{1+c^2} + \frac{ac}{1+b^2} + \frac{bc}{1+a^2} + \frac{3}{2} \geq ab + bc + ca$$

פתרון. במילים אחרות $\sum_{cyc} \frac{1}{a + a^3} + \frac{3}{2} \geq \sum_{cyc} \frac{1}{a}$. נעביר הכול שמאלה:

$$\sum_{cyc}\left(\frac{1}{a+a^3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{a}\right) \geq 0$$

$$\sum_{cyc}\left(\frac{1}{a+a^3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{a}\right) = \sum_{cyc} \frac{2 + a + a^3 - 2 - 2a^2}{2\left(a + a^3\right)} = \sum_{cyc} \frac{a\left(1 - 2a + a^2\right)}{2\left(a + a^3\right)} =$$
$$= \sum_{cyc} \frac{\left(1-a\right)^2}{2\left(1 + a^2\right)} \geq 0$$

4. מספרים אי-שליליים a,b,c מקיימים $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$. הוכיחו כי

$$a + b + c + \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}} \leq 4$$

פתרון. נניח כי $a=\frac{2x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}}$, $b=\frac{2y}{\sqrt{(x+y)(y+z)}}$ כאשר x,y ו-z חיוביים. אז c הוא שורש של משוואה ריבועית $c^2+abc-\left(4-a^2-b^2\right)=0$. ברור שהמקדם החופשי שלילי, לכן יש רק שורש חיובי אחד:

$$c=\frac{-ab+\sqrt{a^2b^2+4\left(4-a^2-b^2\right)}}{2}=\frac{-ab+\sqrt{\left(4-a^2\right)\left(4-b^2\right)}}{2}$$

אם נציב ביטוים באמצעות x,y,z יתקבל

$$c=\frac{-\frac{4xy}{(x+y)\sqrt{(x+z)(y+z)}}+\sqrt{\left(4-\frac{4x^2}{(x+y)(x+z)}\right)\left(4-\frac{4y^2}{(x+y)(y+z)}\right)}}{2}$$

$$=-\frac{2xy}{(x+y)\sqrt{(x+z)(y+z)}}+2\sqrt{\frac{xy+xz+yz}{(x+y)(x+z)}\cdot\frac{xy+xz+yz}{(x+y)(y+z)}}=$$

$$=\frac{-2xy+2(xy+xz+yz)}{(x+y)\sqrt{(x+z)(y+z)}}=\frac{2(x+y)z}{(x+y)\sqrt{(x+z)(y+z)}}=\frac{2z}{\sqrt{(x+z)(y+z)}}$$

לכן גם c מתקבל על ידי נוסחה מאותו סוג. כעת נציב

$$2\sum_{cyc}\frac{x}{\sqrt{(x+y)(x+z)}}+\sqrt{\frac{4}{3}\sum_{cyc}\frac{x^2}{(x+y)(x+z)}}\le 4$$

$$\sum_{cyc}x\sqrt{y+z}+\sqrt{\frac{1}{3}\sum_{cyc}\left(x^2y+x^2z\right)}\le 2\sqrt{(x+y)(x+z)(y+z)}$$

$$\sum_{cyc}x\sqrt{y+z}\overset{(C-S)}{\le}\sqrt{\sum_{cyc}x\cdot\sum_{cyc}x(y+z)}=\sqrt{2\sum_{cyc}\left(x^2y+x^2z+xyz\right)}$$

נשאר להוכיח כי

$$\sqrt{2\sum_{cyc}\left(x^2y+x^2z+xyz\right)}+\sqrt{\frac{1}{3}\sum_{cyc}\left(x^2y+x^2z\right)}\le 2\sqrt{(x+y)(x+z)(y+z)}$$

נסמן $\sum_{cyc}\left(x^2y+x^2z\right)=6kxyz$. אז צריך להוכיח כי

$$\sqrt{2xyz\left(6k+3\right)}+\sqrt{2kxyz}\le 2\sqrt{\left(6k+2\right)xyz}$$

$$\sqrt{6k+3}+\sqrt{k}\le 2\sqrt{3k+1}$$

$$\sqrt{6k+3}+\sqrt{k}=3\cdot\sqrt{\frac{2k+1}{3}}+1\cdot\sqrt{k}\overset{(C-S)}{\le}\sqrt{\left(3+1\right)\left(3\cdot\frac{2k+1}{3}+k\right)}=2\sqrt{3k+1}$$

5. עבור כל a,b,c חיוביים הוכיחו כי

א. $\frac{a}{\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}$.

ב. $\frac{a}{\sqrt[3]{4\left(b^3+c^3\right)}}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\ge\frac{3}{2}$.

א. פתרון ראשון. נעשה קושי-שוורץ:

$$\frac{a}{\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}=\frac{a^2}{a\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}}+\frac{b^2}{ab+bc}+\frac{c^2}{ac+bc}\ge$$

$$\ge\frac{\left(a+b+c\right)^2}{a\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}+ab+ac+2bc}\overset{?}{\ge}\frac{3}{2}$$

$$2\left(a+b+c\right)^2\ge 3\left(a\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}+ab+ac+2bc\right)$$

$$2\left(a^2+b^2+c^2\right)+ab+ac-2bc\ge 3a\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}$$

$$2a^2-a\left(3\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}-b-c\right)+2\left(b^2-bc+c^2\right)\ge 0$$

זה ביטוי ריבועי ב-a. מספיק לבדוק שדיסקרימיננטה לא חיובית:

$$\left(3\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}-b-c\right)^2-16\left(b^2-bc+c^2\right)\le 0$$

$$18\left(b^2+c^2\right)-6\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}\cdot\left(b+c\right)+\left(b+c\right)^2-16\left(b^2-bc+c^2\right)\le 0$$

$$3\left(b^2+c^2\right)+18bc\le 6\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}\cdot\left(b+c\right)$$

$$b^2+c^2+6bc\le 2\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}\cdot\left(b+c\right)$$

$$b^2+c^2+6bc\le 2\left(b+c\right)^2\le 2\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}\cdot\left(b+c\right)$$

הרי $b+c\le\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}$.

פתרון שני. לה"כ $a+b+c=1$. כיוון שהפונקציה $f\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ קמורה, רואים כי \

$$\frac{a}{\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}=\frac{a}{\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)}}+\frac{b}{\sqrt{\left(a+c\right)^2}}+\frac{c}{\sqrt{\left(a+b\right)^2}}\ge$$

$$\ge\frac{1}{\sqrt{2a\left(b^2+c^2\right)+b\left(a+c\right)^2+c\left(a+b\right)^2}}\overset{?}{\ge}\frac{3}{2}$$

נשאר להוכיח כי $4\left(a+b+c\right)^3\ge 9\left(2a\left(b^2+c^2\right)+b\left(a+c\right)^2+c\left(a+b\right)^2\right)$

$$4\left(a^3+b^3+c^3\right)-6a\left(b^2+c^2\right)+3\left(ba^2+bc^2+ca^2+cb^2\right)-12abc\ge 0$$

$$\begin{aligned}&4\left(a^3+b^3+c^3\right)-6a\left(b+c\right)^2+3\left(ba^2+bc^2+ca^2+cb^2\right)=\\&=4a^3+3\left(b+c\right)a^2-6a\left(b+c\right)+\left(b+c\right)^3+3\left(b^3+c^3\right)\ge\\&\ge 4a^3+3\left(b+c\right)a^2-6a\left(b+c\right)+\left(b+c\right)^3+\frac{3}{4}\left(b+c\right)^3=\\&4a^3+3\left(b+c\right)a^2-6a\left(b+c\right)+\frac{7}{4}\left(b+c\right)^3\end{aligned}$$

נגיד ש-$2a=k\left(b+c\right)$, ואז צריכים להראות כי

$$2k^3+3k^2-12k+7\ge 0$$

זה מתקבל מ-$AM-GM$, הרי

$$\frac{2\cdot k^3+3\cdot k^2+7\cdot 1}{12}\ge\sqrt[12]{k^{3\cdot 2}\cdot k^{2\cdot 3}\cdot 1^7}=12k$$

ב.

$$\frac{a}{\sqrt[3]{4\left(b^3+c^3\right)}}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$$

$$\frac{a}{\sqrt[3]{4\left(b^3+c^3\right)}}+\frac{b^2}{ab+bc}+\frac{c^2}{ac+bc}\overset{(C-S)}{\geq}\frac{a}{\sqrt[3]{4\left(b^3+c^3\right)}}+\frac{\left(b+c\right)^2}{ab+ac+2bc}\overset{?}{\geq}\frac{3}{2}$$

$$2a^2\left(b+c\right)+4abc+2\left(b+c\right)^2\sqrt[3]{4\left(b^3+c^3\right)}\geq3\left(a\left(b+c\right)+2bc\right)\sqrt[3]{4\left(b^3+c^3\right)}$$

$$2\left(b+c\right)a^2-\left(3\left(b+c\right)\sqrt[3]{4\left(b^3+c^3\right)}-4bc\right)a+2\left(b^2+c^2-bc\right)\sqrt[3]{4\left(b^3+c^3\right)}\geq0$$

מספיק להראות שהדיסקרימיננטה אינה חיובית.

$$\left(3\left(b+c\right)\sqrt[3]{4\left(b^3+c^3\right)}-4bc\right)^2-16\left(b+c\right)\left(b^2+c^2-bc\right)\sqrt[3]{4\left(b^3+c^3\right)}\leq0$$

$$\left(3\left(b+c\right)\sqrt[3]{4\left(b^3+c^3\right)}-4bc\right)^2\leq16\left(b^3+c^3\right)\sqrt[3]{4\left(b^3+c^3\right)}$$

קל לראות כי $3\left(b+c\right)\cdot\sqrt[3]{4\left(b^3+c^3\right)}\geq\left(b+c\right)^2\geq4bc$ ולכן הביטוי שמעלים בריבוע חיובי, ולכן מספיק להראות כי

$$3\left(b+c\right)\sqrt[3]{4\left(b^3+c^3\right)}-4bc\leq4\cdot\sqrt[3]{2\left(b^3+c^3\right)^2}$$

$$0\leq4\cdot\sqrt[3]{2\left(b^3+c^3\right)^2}-3\left(b+c\right)\sqrt[3]{4\left(b^3+c^3\right)}+4bc$$

כאשר רוצים להראות ש-$0\leq x+y+z$ מספיק להראות כי $3xyz\leq x^3+y^3+z^3$ (אלה אם כן $x=y=z$ אבל זה לא המקרה כי המחוברים הם בעלי סימן שונה).

$$-288bc\left(b+c\right)\left(b^3+c^3\right)\leq128\left(b^3+c^3\right)^2-108\cdot\left(b+c\right)^3\left(b^3+c^3\right)+64b^3c^3$$

$$0\leq72bc\left(b+c\right)\left(b^3+c^3\right)+32\left(b^3+c^3\right)^2-27\cdot\left(b+c\right)^3\left(b^3+c^3\right)+16b^3c^3$$

נסמן $b^2+c^2=2kbc$. אז $k\geq1$. אז $\left(b+c\right)^2=2k+2$.

הביטוי מקבל צורה $\left(bc\right)^3$ כפול

$$72(2k+2)(2k-1)+32(2k+2)(2k-1)^2-27\cdot(2k+2)^2(2k-1)+16=$$
$$=4\Big((k+1)(2k-1)\big(36+16(2k-1)-27(k+1)\big)+4\Big)=$$
$$=4\Big((k+1)(2k-1)(5k-7)+4\Big)=4\Big((k+1)\big(10k^2-19k+7\big)+4\Big)=$$
$$=4\big(10k^3-9k^2-12k+11\big)$$

$$10k^3-9k^2-12k+11=10\big(k^3-k^2-k+1\big)+k^2-2k+1=$$
$$=(k-1)^2\big(10(k+1)+1\big)\geq 0$$

6. מספרים חיוביים a,b,c מקיימים $ab+ac+bc\geq 11$. הוכיחו כי

$$10\cdot\sqrt[3]{\frac{a^2+3}{4}}+7\cdot\sqrt[3]{\frac{b^2+3}{7}}+6\cdot\sqrt[3]{\frac{c^2+3}{12}}\geq 23$$

פתרון. כידוע, ממוצע קובי של מספרים חיוביים גדול או שווה לממוצע חשבוני. לכן

$$\sqrt[3]{\frac{a^2+3}{4}}=\sqrt[3]{\frac{\frac{a^2+1}{2}+1}{2}}\geq\frac{\sqrt[3]{\frac{a^2+1}{2}}+1}{2}$$

$$\sqrt[3]{\frac{b^2+3}{7}}=\sqrt[3]{\frac{5\cdot\frac{b^2+1}{5}+1+1}{7}}=\frac{5\cdot\sqrt[3]{\frac{b^2+1}{5}}+2}{7}$$

$$\sqrt[3]{\frac{c^2+3}{12}}=\sqrt[3]{\frac{5\cdot\frac{c^2+1}{10}+1}{6}}\geq\frac{5\cdot\sqrt[3]{\frac{c^2+1}{10}}+1}{6}$$

לכן

$$10\cdot\sqrt[3]{\frac{a^2+3}{4}}+7\cdot\sqrt[3]{\frac{b^2+3}{7}}+6\cdot\sqrt[3]{\frac{c^2+3}{12}}\geq$$
$$\geq 5\left(\sqrt[3]{\frac{a^2+1}{2}}+1\right)+5\cdot\sqrt[3]{\frac{b^2+1}{5}}+2+5\cdot\sqrt[3]{\frac{c^2+1}{10}}+1=$$
$$=5\left(\sqrt[3]{\frac{a^2+1}{2}}+\sqrt[3]{\frac{b^2+1}{5}}+\sqrt[3]{\frac{c^2+1}{10}}\right)+8\overset{?}{\geq}23$$

לכן מספיק להראות כי $\sqrt[3]{\frac{a^2+1}{2}}+\sqrt[3]{\frac{b^2+1}{5}}+\sqrt[3]{\frac{c^2+1}{10}}\geq 3$.

כלומר צריך להוכיח שממוצע חשבוני של 3 השורשים הוא לפחות 1. מספיק להראות שממוצע הנדסי הוא לפחות 1. כלומר $\frac{a^2+1}{2}\cdot\frac{b^2+1}{5}\cdot\frac{c^2+1}{10}\geq 1$, במילים אחרות

$$\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)\left(c^2+1\right)\geq 100$$

נשים לב כי $\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)=\left(a+b\right)^2+\left(ab-1\right)^2$. לכן

$$\left(a^2+1\right)\left(b^2+1\right)\left(c^2+1\right)=\left(\left(a+b\right)^2+\left(ab-1\right)^2\right)\left(c^2+1\right)\overset{(C-S)}{\geq}$$
$$\geq\left(\left(a+b\right)\cdot c+\left(ab-1\right)\cdot 1\right)^2=\left(ac+bc+ab-1\right)^2\geq\left(11-1\right)^2=100$$