תרגיל 9

1. בהנחה ש-$0 < a,b,c \le 2$ ובנוסף $abc = 1$, הוכיחו כי $ab + ac + bc \le 5$.

2. הוכיחו כי לכל n טבעי ולכל x חיובי מתקיים $x^n + x^{-n} - 2 \ge n^2\left(x + x^{-1} - 2\right)$.

3. מספרים חיוביים a,b,c מקיימים $abc = 1$. הוכיחו כי

$$\frac{ab}{1+c^2} + \frac{ac}{1+b^2} + \frac{bc}{1+a^2} + \frac{3}{2} \ge ab + bc + ca$$

4. מספרים אי-שליליים a,b,c מקיימים $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$. הוכיחו כי

$$a + b + c + \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}} \le 4$$

5. עבור a,b,c חיוביים, הוכיחו כי

א. $\frac{a}{\sqrt{2\left(b^2 + c^2\right)}} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \ge \frac{3}{2}$.

ב. $\frac{a}{\sqrt[3]{4\left(b^3 + c^3\right)}} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \ge \frac{3}{2}$.

6. מספרים חיוביים a,b,c מקיימים $ab + ac + bc \ge 11$. הוכיחו כי

$$10 \cdot \sqrt[3]{\frac{a^2+3}{4}} + 7 \cdot \sqrt[3]{\frac{b^2+3}{7}} + 6 \cdot \sqrt[3]{\frac{c^2+3}{12}} \ge 23$$