תרגיל 8

1. מצאו תת-קבוצה עם כמות איברים מקסימלית בקבוצה $\{1,2,3,4,...,2016,2017\}$, כך שהפרש של כל שני מספרים בתת-קבוצה שונה מ-4 ושונה מ-7.

פתרון. העניין בשאלות מסוג זה היא מעגלים אי-זוגיים. אם למשל היה מדובר במספרים 3 ו-7 במקום 4 ו-7, אז היה אפשר לקחת בערך חצי מהמספרים. אם יש מעגל שמורכב ממספר אי-זוגי של מספרים עם קפיצות של 4 ו-7, אז במעגל זה אפשר לקחת פחות מחצי מספרים.

המעגל האי-זוגי הקצר ביותר מורכב מ-11 מספרים קופצים 7 פעמים קדימה בקפיצות של 4, וגם 4 פעמים אחורה בקפיצות של 7, למשל:

$$\underline{1\to 5\to 9\to 2\to 6\to 10\to 3\to 7\to 11\to 4\to 8}$$

מכאן רואים שמהמספרים $\{1,2,3,...,10,11\}$ ניתן לבחור לא יותר מאשר 5 מספרים, וגם המעגל הזה עוזר למצוא חמישייה של מספרים שאפשר לקחת, למשל 1,3,4,6,9 (תנאי הכרחי הוא שהמספרים לא יהיו סמוכים במעגל).

אם ניקח את כל המספרים שהם 1,3,4,6,9 מודולו 11, לא יהיו הפרשים 4 ו-7.

אכן, אם נוסיף לשאריות אלה 4 מודולו 11, נקבל 5,7,8,10,2 וזה מספרים שלא היו קודם. אם נחסיר 7 מהמספרים 1,3,4,6,9 מודולו 11, נקבל אותם מספרים (מכיוון ש-$4\equiv -7\left(\mathrm{mod}11\right)$).

שארית של 2017 לאחר חלוקה ב-11 הוא 4, מכיוון 2013 מתחלק ב-11.

נוכל לקחת 5 מספרים מכל 11 ברצף, ומבין 4 המספרים האחרונים נוכח לקחת 3 מספרים: $2013+4, 2013+3, 2013+1$. הכמות שמתקבלת במקרה זה היא

$$5\cdot\frac{2013}{11}+3=5\cdot 183+3=915+3=918$$

נבדוק אם אפשר לקחת יותר מספרים. מכיוון שבכל רצף של 11 אפשר לקחת לכל היותר 5 מספרים, צריך לקחת את כל 4 המספרים האחרונים: 2017, 2016, 2015, 2014. אסור לקחת מספרים שמתקבלים באמצעות חיסור של 4 או 7 מהמספרים האלה, כלומר את 2013, 2012, 2011, 2010, 2009, 2008, 2007. לכן מבין 2013 – 2003 אפשר לקחת ר' 4 מספרים וזה פחות ממה שלקחנו בדוגמה הקודמת. כלומר לקחנו מספר 1 יותר בתחום 2017 – 2014 אבל מספר אחד פחות מבין 2013 – 2003, כלומר זה לא יכול לשפר.

2. נתון פאון. איילה ובני משחקים משחק: איילה בוחרת נקודה שקופה במרחב, ובני שואל אותה את השאלות מהסוג הבא: הוא מצייר מישור, ושואל באיזה צד של המישור נמצאת הנקודה (לפני המישור, אחרי המישור או על המישור). המטרה של בני היא לגלות, האם הנקודה של איילה נמצאת בתוך הפאון. כמה שאלות בני יצטרך לשאול:

א. כאשר הפאון הוא קוביה?
ב. כאשר הפאון הוא תמניון משוכלל?

תשובה. א. 5. ב. 4.

פתרון. ב. תמניון משוכלל זה קמור של נקודות שנמצאות על הצירים במרחק 1 מהראשית. בני ישאל על המישורים xy, xz, yz, וזה יגביל את הנקודה לשמינית מרחב, שבה החלק שנמצא בתוך התמניון יהיה בצד אחד של פאה היחידה בחלק זה של מרחב, והחלק החיצוני יהיה בצד אחר של המישור. לכן בשאלה אחת נוספת (לגבי פאה רלוונטית) בני יוכל להבין האם הנקודה היא בפנים או בחוץ.

צריך להוכיח גם, שאי-אפשר להסתפק בפחות מ-4 שאלות. אם היו רק 3 שאלות או פחות, המישורים שנבחרו מחלקים את המרחב לחלקים לא חסומים. לכן החלקים שנוצרו הם לא חסומים, ולכן לא משנה מה התשובות שקיבלנו לא נוכל לדעת בוודאות שבנקודה בתוך הפאון, במקרה שהיא בפנים.

א. קל להמציא שיטה שמשתמשת ב-5 שאלות. ניקח מישור שעובר דרך שתי מקצועות מנוגדים, שחותך את הקוביה במלבן $1\times\sqrt{2}$, ואז קוביה מחולקת לשתי מנסרות משולשיות. הנקודה נמצאת בחצי מרחב שמכיל כזאת מנסרה, ורוצים לדעת האם הנקודה בתוך המנסרה, צריך לשאול על כל הפאות של המנסרה. למנסרה יש 5 פאות, אבל זה כולל פאה שכבר נבדקה, לכן יש 5 שאלות בסה"כ.

קל להוכיח שלא מספיק 3 שאלות (בדיוק כמו שעשינו בסעיף ב') אבל יותר קשה להוכיח שלא מספיק 4 שאלות.

עבור כל פאה, יתכן שהנקודה נבחרה בסמוך לפאה, בצד זה או אחר. הדרך לגלות איזה אחד מהמצבים יש לנו הוא לשאול לגבי הפאה. יש מצב שלא צריך לעשות את זה, אם כבר פסלנו את האפשרות שנקודה נבחרה ליד הפאה, כלומר שהפאה נמצאת באותו צד של המישור שכבר שאלו עליו ונפסל.

זאת אומרת, שכל פאה צריך "לפסול" בדרך כלשהו: או לשאול על המישור שלה, או לשאול לגבי מישור שהפאה נמצאת בצד אחד שלו. לפאות שעוד לא נפסלו עדיין בשלב כלשהו נקרא הפאות **הרלוונטיות**. כל פאה רלוונטית עלולה להישאר רלוונטית אחרי שאלה נוספת, אלה אם כן שואלים על מישור הפאה, ואז כמות הפאות הרלוונטיות עלול לרדת ב-1 בלבד (אם התשובה היא שהנקודה באותו צד כמו הקוביה.

ביחס למישור הראשון ששואלים עליו, נחלק את הפאות ל-3 סוגים: הפאות שנמצאות בצד אחד, הפאות שנמצאות בשני הצדדים, והפאות שנמצאות בצד שני. במקרה של תשובה אחת הפאות הרלוונטיות לאחר התשובה הן משני הסוגים הראשונים, ובמקרה של תשובה אחרת הפאות הרלוונטיות הן משני הסוגים האחרונים. אם באחת המקרים נשארות 5 פאות רלוונטיות, אחרי שאלה שנייה עלולות להישאר 3 פאות רלוונטיות, אחרי שאלה שלישית עלולות להישאר 2 פאות רלוונטיות, לכן אחרי שאלה רביעית עלולה להישאר פאה רלוונטית אחת לפחות, כלומר המשחק לא נגמר ב-4 שאלות (כי צריך עוד לשאול על הפאה הרלוונטית שנשארה).

לכן המישור הראשון צריך להיות כזה, שיש לפחות 2 פאות לגמרי בצד אחד, ולפחות 2 פאות שהן לגמרי בצד אחר של המישור הראשון. שתי פאות שהן בצד אחד חייבות להיות סמוכות ולא נגדיות (אחרת כל הקוביה באותו צד). אם שתי פאות, A ו-B נמצאות לגמרי בצד אחד של המישור, אז שתי הפאות שסמוכות ל-A ול-B נמצאות באופן חלקי בצד זה של המישור, לכן הפאות שנמצאות בצד האחר של המישור אלה פאות נגדיות ל-A ול-B. לכן הוכחנו, שאם רוצים להסתפק ב-4 שאלות, מהלך הראשון צריך להיות כמו שתיארנו בשיטה שהצגנו.

ובכן לאחר מהלך ראשון במקום קוביה יש מנסרה משולשית, ויש עדיין 4 פאות רלוונטיות. על מנת שנסיים ב-3 מהלכים צריך שמבין 4 הפאות הרלוונטיות של המנסרה בכל צד של המישור בשאלה השנייה יהיו שתי פאות לכל היותר, אבל במנסרה שלנו זה לא מתאפשר.

3. בערמה אחת k אבנים, בערמה אחרת n אבנים. בכל דקה המכונה בוחרת ערמה שיש בה מספר זוגי של אבנים ומעבירה בדיוק חצי מהאבנים בערמה זאת לערמה האחרת. אם בשתי הערמות יש מספר אי-זוגי של אבנים, המכונה מפסיקה לעבוד. עבור איזה מספר של זוגות סדורים (n,k) של מספרים טבעיים שלא עולים על 1000, המכונה תוכל להמשיך לעבוד לנצח?

פתרון. נניח ש-$k+n$ אי-זוגי. אז בכל מהלך יש ערמה זוגית וערמה אי-זוגית, והמשחק ממשיך לנצח.

באופן דומה, אם אחד מבין המספרים k,n מתחלק ב-2^ℓ אבל לא ב-$2^{\ell+1}$, והמספר האחד מתחלק ב-$2^{\ell+1}$, אז המשחק עשוי להימשך לנצח. אכן, הסכום לא מתחלק ב-$2^{\ell+1}$, וכל ערמה מתחלקת ב-2^ℓ. נניח שהמכונה תחלק את הערמה שכמות האבנים בה מתחלקת ב-$2^{\ell+1}$. אז גם אחרי המהלך כמות האבנים בכל ערמה מתחלקת ב-2^ℓ, אבל הסכום לא מתחלק ב-$2^{\ell+1}$, לכן בדיוק ערמה אחת היא כפולה של $2^{\ell+1}$. לכן המצב בדיוק מהסוג שהיה קודם, וממצב כזה אפשרי לעבור לעוד מצב כזה וכך הלאה.

נשאר לחשוב על מקרה ש-k,n שניהם מתחלקים ב-2^ℓ, אבל אף אחד מהם לא מתחלק ב-$2^{\ell+1}$, כמו למשל שני מספרים אי-זוגיים, או שני מספרים שמתחלקים ב-4 אבל לא ב-8. אז לא משנה איזה ערמה ניקח, נעביר לערמה השנייה כמות של אבנים שמתחלקת $2^{\ell-1}$ אבל לא ב-2^ℓ, כלומר לאחר המהלך כמות האבנים בכל הערמה מתחלק ב-$2^{\ell-1}$ אבל לא ב-2^ℓ, כלומר זה מצב מאותו סוג אבל אם ℓ נמוך יותר. כלומר אחרי ℓ מהלכים המשחק יסתיים, כי בכל ערמה יהיה מספר אי-זוגי של המלכים.

כלומר, המצבים הלא טובים זה 500^2 זוגות של מספרים אי-זוגיים, 250^2 זוגות של מספרים זוגיים שלא מתחלקים ב-2, וכך הלאה, והתשובה היא

$$1000^2 - \underset{(2k+1)}{500^2} - \underset{(4k+1)}{250^2} - \underset{(8k+4)}{125^2} - \underset{(16k+8)}{63^2} - \underset{(32k+16)}{31^2} - \underset{(64k+32)}{16^2} - \underset{(128k+64)}{8^2} - 4^2 - 2^2 - 1$$

4. נתונה חפיסה של 52 קלפים. ירון ותומר יודעים את סדר הקלפים בחפיסה, ותומר רוצה שגם אלון ידע את סדר הקלפים (הוא לא חייב לדעת האם זה מלמעלה למטה או להפך). מותר לתומר לשאול את ירון שאלות מהסוג: "כמה קלפים יש בין קלף X לקלף Y ?" מהי הכמות המינימאלית של השאלות שתומר צריך לשאול?

תשובה. 34.

פתרון. נניח שהקלפים ממוספרים מ-1 עד 52, וזה הסדר האמיתי שלהם.
הנה שיטה שמסתפקת ב-34 שאלות:

$(1,52),(1,3),$ $(2,50),(2,49),$ $(51,5),(51,6),$ $(4,47),(4,46),$
$(48,8),(48,9),$ $(7,44),(7,43),$ $(45,11),(45,12),$ $(10,41),(10,40),$
$(42,14),(42,15),$ $(13,38),(13,37),$ $(39,17),(39,18),$ $(16,35),(16,34),$
$(36,20),(36,21),$ $(19,32),(19,31),$ $(33,23),(33,24),$ $(22,29),(22,28),$
$(30,27),(30,26).$

ניתן להבין למה זה עובד כאשר מסתכלים על זוגות של שאלות. שאלה ראשונה היא נותנת מרחק מירבי שיש, ומהתשובה אלון יכול להבין ש-1 ו-52 בקצוות נגדיות. מהשאלה השנייה הוא יבין ש-3 הוא במקום 3 (מרחק 2 מ-1). הזוג הבא של שאלות הוא מרחק כמעת הכי גדול שנשאר – מרחק הכי גדול שנשאר הוא בין 2 ל-52, אבל משאלה רביעית יהיה אפשר לשחזר באופן חד-משמעי מיקום של 50, 49 ו-2 (ברור באיזה צד 49 ו-50 כי בהתחלה יש 3 שלא מאפשר לשים שני מספרים ברצף בקצה, לכן 2 בהתחלה).

שאלות בהמשך נבנו באופן דומה, וכל זוג שאלות מאפשר למקם עוד 3 מספרים. בסוף אלון יצליח למקם 51 מספרים באופן חד-משמעי, ונשאר רק מספר אחד – 25 במקרה שלנו, שאותו אפשר למקם רק במקום אחד שנשאר.

נוכיח שאי-אפשר להסתפק בפחות שאלות. נבנה גרף: קודקודים הם הקלפים, קשתות הן השאלות. נתבונן ברכיבי הקשירות של הגרף. ברכיב קשירות של k קודקודים יש לפחות $k-1$ קשתות. יחס בין כמות הקשתות לכמות הקודקודים הוא לפחות $\frac{k-1}{k}=1-\frac{1}{k}$ בכל רכיב קשירות, וכמה ש-k יותר גדול מספר זה יותר גדול.

יכול להיות רק רכיב קשירות אחד של קודקוד אחד, כי אם יש שני מספרים שלא הופיעו באף שאלה, ירון היה יכול להחליף אותם בלי שאלון ידע על זה. כמו כן, לא יכולים להיות רכיבי קשירות של שתי קודקודים, כי במקרה זה גם יש שני מספרים שהיה אפשר להחליף.

ליד כל מספר נרשום "משקל" שהוא $1-\frac{1}{k}$ כאשר k הוא גודל של רכיב קשירות של מספר זה. סכום המספרים האלה קטן או שווה לכמות של קשתות בגרף, כלומר של שאלות. רק אחד מהמשקלים יכול להיות 0, המשקלים האחרים הם $\frac{2}{3}$. לכן כמות השאלות היא לפחות $51\cdot\frac{2}{3}=34$, כמו בשיטה שהוצגה. בעצם היה אפשר לא לספור, כי בשיטה שהצגנו היו רכיבי קשירות של 3 קודקודים ושתי קשתות, וזה הכי קטן שאפשר.

5. בתחרות שחמט בזק שמתנהל באמצעות לוח אחד בלבד, השתתפו $2n+3$ שחקנים. כל אחד משחק עם כל אחד פעם אחת בדיוק. המשחקים נערכים ברצף זה אחר זה, ולכל שחקן אחרי כל משחק יש הפסקה של לפחות n משחקים. הוכיחו שיש שחקן שהשתתף גם במשחק ראשון, וגם באחרון.

פתרון. נתבונן ב-$n+3$ משחקים ברצף $g_1, g_2, g_3, ..., g_{n+3}$. השתתפו $2n+6$ שחקנים. נשים לב כי יש לכל היותר 3 שחקנים שהשתתפו פעמיים. אכן, הזוגות של משחקים עם אותו שחקן יכולים להיות (g_1, g_{n+2}) או (g_2, g_{n+3}) או (g_1, g_{n+3}). בכל זוג כזה של משחקים יש לכל היותר שחקן אחד משותף כי אסור שאותם שני שחקנים ישחקו פעמיים זה עם זה. מצד שני אם יש $2n+6$ שחקנים ורק $2n+3$ שחקנים שונים אז חייבים שיהיו לפחות 3 חזרות. לכן יש בדיוק 3 חזרות. לכן אורך ההפסקה לשחקנים שהשתתפו ב-g_1 הוא n עבור שחקן אחד ו-$n+1$ עבור שחקן אחר.

לכן אורך של כל הפסקה של כל שחקן הוא n או $n+1$. נגיד ש**צעד** זה הפרש בין מספרי המשחקים הרצופים של כל שחקן. אז כל צעד הוא $n+1$ או $n+2$. אם עבור שחקן מסוים כל הצעדים היו באורך $n+2$, והיו לו $2n+2$ משחקים, אז הפרש בין המספר של המשחק האחרון למשחק הראשון שלו הוא $(n+2)(2n+1)$. כמות המשחקים הכוללת של כולם שווה לכמות הזוגות $= \frac{(2n+3)(2n+2)}{2} = (n+1)(2n+3)$ שזה גדול ב-1. לכן אם יש שחקן כזה שסכום הצעדים שלו $(n+2)(2n+1)$, אז הוא בהכרח השתתף במשחק הראשון ובמשחק האחרון.

נניח בשלילה שכל שחקן עשה גם צעד קצר של $n+1$. נגיד שזה שעשה את הצעד הקצר אחרון הוא דוב. נגיד שלאחר צעד זה הוא שיחק אם צבי. הצעד האחרון של צבי לפני משחק זה היה ארוך (של $n+2$). כל הצעדים הקודמים של צבי גם היו ארוכים. אכן, אם צבי נתבונן בצעד אחרון של צבי שהיה $n+1$, ומאז הוא עשה k צעדים של $n+2$, ומצד שני דוב עשה בסוף צעד של $n+1$ ולפני זה k צעדים של $n+2$, לכן צבי ודוב שחקו גם קודם זה אם זה. לכן כל הצעדים הקודמים של צבי הם ארוכים, בניגוד להגדרה של דוב.

6. נתונה קבוצה X שיש בה 56 איברים. מצאו את הערך המינימלי של n, כך שלכל משפחה של 15 תתי-קבוצות של X, שאיחוד של כל 7 מהם מכיל לפחות n איברים, אז קיימות 3 קבוצות במשפחה שהחיתוך שלהן לא ריק.

תשובה. 41.

פתרון. נניח כי $n \geq 41$. נניח בשלילה שיש משפחה של 15 קבוצות $A_1, A_2, ..., A_{15}$ שמקיימות את התנאים כך שכל איבר ב-X מוכל בשתי קבוצות מהמשפחה לכל היותר. אם יש $x \in X$ שמוכל רק ב-A_i, מותר להוסיף אותו גם ל-A_j נוסף בלי לפגוע בתנאים. לכן ניתן להניח שכל $x \in X$ מוכל בדיוק בשתי קבוצות מהמשפחה.

לכן ניתן לחשוב על X בתור קבוצה של קשתות בגרף, כאשר קודקודי הגרף הן $A_1, A_2, ..., A_{15}$. מכיוון שלכל 7 קודקודית יש לפחות 41 קשתות שקשורות לקודקודים אלה, ל-8 הקודקודים האחרים יש לכל היותר 15 קודקודים שמחברים בינם. עם בכל תת-גרף של 8 קודקודים יש לפחות 15 קשתות, אז בכל תת-גרף של 14 קודקודים יש לפחות $15 \cdot \binom{14}{2} \Big/ \binom{8}{2} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{8 \cdot 7} = \frac{195}{4} > 48$ קודקודים. יש לכל היותר 7 קשתות שקשורות לקודקוד שנשאר.

מצד שני סכום הדרגות של כל בקודקודים בגרף שווה 112, כי כל קשת נספרת פעמיים. לכן קיים קודקוד Q עם יותר מ-7 קשתות, הרי $7 \cdot 15 = 105$ וזה קטן מסכום הדרגות.

סתירה. נשאר להמציא דוגמה עבור $n = 40$.

נסביר איך לבנות דוגמה ל-$n = 40$. בעצם, אנחנו יכולים שוב לחשוב על גרף שאיברי X הן קשתות שלו, $A_1, A_2, \ldots$ הקודקודים. רוצים שיהיו $7 \cdot 8 = 56$ קשתות, $7 + 8 = 15$ קודקודים. מתבקש לחשוב על גרף דו-צדדי מלא $K_{7,8}$: לוקחים 7 קודקודים בצבע כחול, 8 קודקודים בצבע אדום, ומחברים כל קודקוד כחול לכל קודקוד אדום.

אם ניקח 8 קודקודים כלשהם, מתוכם $4 + x$ אדומים ו-$4 - x$ כחולים, כאשר x מספר שלם, מחברים בין הנקודות האלה $4^2 - x^2 \leq 16$ קשתות. לכן לכל 7 קודקודים מחוברים לפחות $56 - 16 = 40$ קשתות.