תרגיל 7

1. רינה רושמת את כל הריבועים של מספרים טבעיים $1,4,9,16,25,...$. לאחר מכן היא רושמת הפרש של כל שני מספרים בשורה הקודמת. האם קיים מספר שמופיע ברשימה השנייה יותר מפעם אחת? האם קיים מספר שמופיע ברשימה השנייה 7 פעמים בדיוק?

2. האם קיימת סדרה אינסופית של מספרים טבעיים $a_1,a_2,a_3,...,a_n,...$ כך שלכל n הסכום $a_1^2+a_2^2+a_3^2+...+a_n^2$ הוא בהכרח ריבוע שלם?

3. האם קיימים מספרים שלמים חיוביים שונים m,n,s,t עבורם $\sqrt{m}+\sqrt[3]{n}=\sqrt{s}+\sqrt[3]{t}>2004$ ובנוסף גם $m+n=s+t$?

4. למספר חיובי שלם n לוקחים את 4 המחלקים הקטנים ביותר שלו $a<b<c<d$ (שגם הם שלמים חיוביים). מצאו את כל הערכים של n עבורם $n=a^2+b^2+c^2+d^2$.

5. מצאו מספר $100\le n\le 1997$ כך ש- 2^n+2 מתחלק ב- n.

6. יהא p הוא ראשוני אי-זוגי. לכל a, נגדיר מספר $S_a=\frac{a}{1}+\frac{a^2}{2}+\frac{a^3}{3}+...+\frac{a^{p-1}}{p-1}$.

נגיד ש- m ו- n הם מספרים שלמים זרים, המקיימים $S_3+S_4-3S_2=\frac{m}{n}$. הוכיחו כי m מתחלק ב- p.