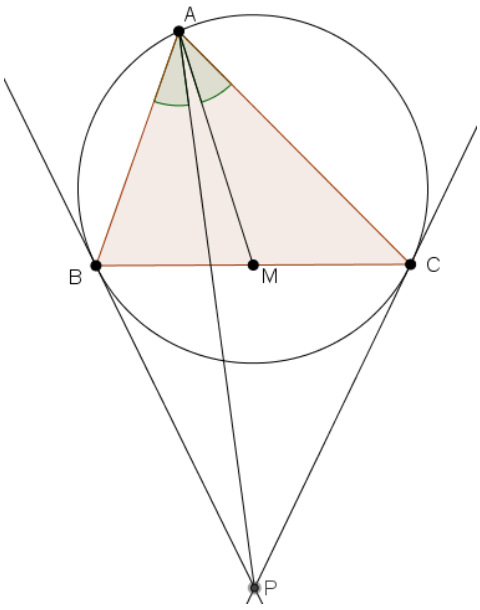
פתרון תרגיל 6

בהרבה שאלות בתרגיל זה עוזר מושג ***התיכושקף***. תיכושקף במשולש הוא הישר המתקבל משיקוף של התיכון ביחס לחוצה זווית של אותו קודקוד.
ישנם שתי תכונות שקולות לתיכושקף:



תכונת התיכושקף. במשולש ABC, נקודה T נמצאת על BC כך ש-AT הוא תיכושקף. אזי $\frac{BT}{CT}=\frac{BA^2}{CA^2}$. ניסוח יותר כללי: אם נקודה S השונה מ-A נמצאת על תיכושקף, אז: $\frac{S_{ABS}}{S_{ACS}}=\frac{AB^2}{AC^2}$.

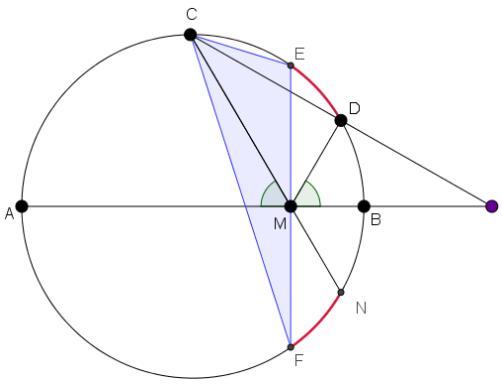
למת התיכושקף. משולש ABC חסום במעגל. העבירו משיקים למעגל בנקודות B ו-C הנפגשים בנקודה P. אזי AP הוא תיכושקף במשולש ABC.

הוכחת התכונה. אם M הוא אמצע של BC, התיכון AM חוצה את שטח המשולש לכן $\frac{AB\cdot AM\cdot\sin BAM}{2}=S_{ABM}=S_{ACM}=\frac{AC\cdot AM\cdot\sin CAM}{2}$. לכן $\frac{AB}{AC}=\frac{\sin CAM}{\sin BAM}$. אם נשקף את M ביחס לחוצה-זווית מ-A, נקבל נקודה 'M ואז $\frac{S_{ABM'}}{S_{ACM'}}=\frac{AB\cdot AM'\cdot\sin BAM'}{AC\cdot AM'\cdot\sin CAM'}=\frac{AB}{AC}\cdot\frac{\sin CAM}{\sin BAM}=\left(\frac{AB}{AC}\right)^2$. אם נחליף 'M בנקודה אחרת S על הישר 'AM נחליף במונה ובמכנה את 'AM ב-AS אבל זה לא ישנה את ערך השבר.

הוכחת הלמה. מספיק לבדוק את היחס בין שטח ABP לשטח ACP.
$\frac{S_{ABP}}{S_{ACP}}=\frac{AB\cdot BP\cdot\sin\sphericalangle ABP}{AC\cdot PC\cdot\sin\sphericalangle ACP}=\frac{AB\cdot\sin\sphericalangle C}{AC\cdot\sin\sphericalangle B}=\frac{AB^2}{AC^2}$. במעבר השני השתמשנו בכך ש-CP=BP ו-$\sphericalangle ABP=\sphericalangle C$ ו-$\sphericalangle ACP=\sphericalangle B$, ובמעבר שלישי השתמשנו במשפט הסינוסים במשולש ABC. ולכן סיימנו את הוכחת הלמה.

1. נתון מעגל וקוטרו AB. נבחרה נקודה M על AB. נקודות C ו-D על המעגל, מצד אחד של הקוטר, כך ש-$\sphericalangle DMB=\sphericalangle AMC$. הוכח כי כל הישרים CD חותכים את הישר AB בנקודה קבועה.

פתרון. נעביר דרך M מיתר EF המאונך ל-AB. לנקודת החיתוך של הישר CM עם המעגל נקרא N. כעת נקבל כי $\sphericalangle DMB=\sphericalangle CMA=\sphericalangle BMN$ כלומר הנקודות N ו-D



סימטריות ביחס ל-AB. בנוסף הנקודות E ו-F סימטריות ביחס לקוטר AB, ולכן הקשתות EN ו-FD שוות, ולכן $\measuredangle NCE = \measuredangle FCD$. כלומר CN ו-CD הם שיקוף זה של זה ביחס לחוצה זווית C. הישר CN שהוא CM הוא תיכון במשולש CEF ולכן CD הוא **תיכושקף** במשולש CEF.

כעת בעצם סיימנו את השאלה: הוכחנו כי CD תיכושקף כלומר עובר בנקודת החיתוך של המשיקים למעגל בנקודות E ו-F, אבל בברור הנקודה הזאת נמצאת על AB, ולכן כל הישרים CD חותכים את AB בנקודה קבועה.

2. משולש ABC חסום במעגל Ω. חוצה זווית מ-A פוגש את הצלע BC בנקודה D את הקשת BC של Ω בנקודה E. מעגל שקוטרו DE פוגש את Ω שנית בנקודה F. הראו כי AF הוא ***תיכושקף*** של המשולש ABC, כלומר שהוא סימטרי לתיכון מהקודקוד A ביחס לחוצה זווית מנקודה A.

פתרון. במשולש BCF, חוצה זוויות חיצונית של הזווית F חוצה את הקשת BCF, לכן הוא בהכרח עובר דרך E. לכן חוצה זוויות פנימית של BFC חוצה את מאונך ל-FE, כלומר עובר דרך D. לכן $\frac{BA}{CA}=\frac{BD}{CD}=\frac{BF}{CF}$ לפי תכונת חוצה זווית. מכאן נוכל לחשב את יחס השטחים של משולשים ABF ו-ACF שווה (היות והם חסומים באותו מעגל)

$$\frac{S_{CAF}}{S_{BAF}}=\frac{AC\cdot CF\cdot AF}{AB\cdot BF\cdot AF}=\frac{AC}{AB}\cdot\frac{CF}{BF}=\left(\frac{AC}{AB}\right)^2$$

לכן F על התיכושקף לפי תכונת התיכושקף.

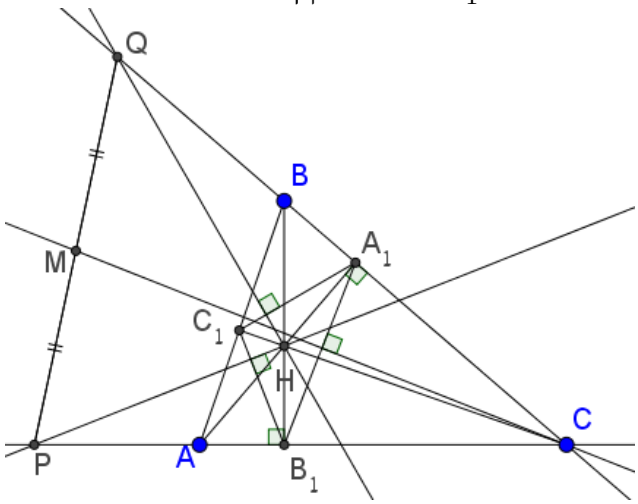
הערה (עבור אלה שיודעים אינברסיה). עם משלבים שיקוף ביחס לחוצה זווית של A עם אינברסיה מ-A, ניתן לבחור את הרדיוס של האינברסיה כך של B ו-C יתחלפו, ומכאן אפשר לקבל עוד פתרון פשוט.

3. נתון משולש ABC החסום במעגל ω. התיכון מ-A לצלע BC חותך את ω שנית בנקודה A_1. באופן דומה נגדיר את B_1 ו-C_1. ישר העובר דרך A ומקביל לצלע BC חותך שנית את ω בנקודה A_2. באופן דומה נגדיר את B_2 ו-C_2. הוכיחו כי הישרים A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 נחתכים בנקודה אחת.

פתרון. לנקודת החיתוך של המשיקים בנקודות B ו-C ל-ω נקרא 'A. ולנקודת החיתוך של 'AA עם ω נקרא A_0. הקשתות BA_1 ו-CA_0 שוות כיוון ש-'AA תיכושקף ב-ABC. המשולש BA'C שווה שוקעים וחוצה זווית BA'C הוא גם קוטר ב-ω. שיקוף ביחס לחוצה הזווית מעביר את B ל-C, ומשוויון הקשתות שהוכחנו נובע כי A_0 עובר ל-A_1. חוצה הזווית הוא גם הקוטר ולכן A עובר ל-A_2. כלומר השיקוף מעביר את הישר A_1A_2 לישר AA_0. הישר AA_0 הוא תיכושקף ובגלל שהתיכושקפים נחתכים בנקודה אחת – נקודת למואן (זה נובע ישירות ממשפט צ'בה זוויתי, נשאיר זאת כתרגיל לקורא) גם הישרים A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 נחתכים בנקודה.

4. במשולש ABC הגבהים AA_1, BB_1, CC_1 נחתכים בנקודה H. הגבהים מ-H לישרים A_1C_1 ו-B_1C_1 חותכים את הקרניים CA ו-CB בנקודות P ו-Q בהתאמה. הוכח כי האנך מ-C ל-A_1B_1 חוצה את הקטע PQ.

פתרון. החיתוך של האנך מ-C ל-A_1B_1 עם הקטע PQ יסומן ב-M. $\measuredangle B_1CM = 90° - \measuredangle CBA = \measuredangle BCC_1$ כאן בשוויון השני השתמשנו בכך שהמרובע ABA_1B_1 חסום במעגל. כלומר קיבלנו כי CM ו-CC_1 הם שיקוף זה של זה ביחס לחוצה זווית $\measuredangle C$ ולכן בשביל להוכיח כי CM הוא תיכון במשולש CPQ מספיק להוכיח כי CH הוא תיכושקף באותו משולש. בשביל זה נשתמש בתכונה נוספת של התיכושקף.



טענה. נתון משולש ABC ונקודה X בתוכו. אם $\measuredangle BAX = \measuredangle ACX$, ובנוסף $\measuredangle CAX = \measuredangle ABX$ אז X נמצאת על התיכושקף מ-A.

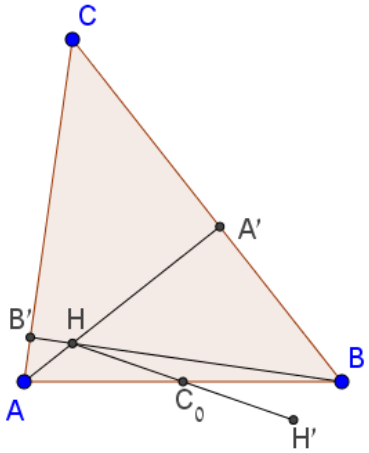
הוכחת הטענה. המשולשים ABX ו-ACX בברור דומים ולכן יחס שטחיהם שווה לריבוע היחס בין הצלעות המתאימות כלומר $\frac{S_{ABX}}{S_{ACX}} = \frac{AB^2}{AC^2}$ ומתכונת התיכושקף נובע כי X על התיכושקף.

נחזור לפתרון השאלה. נוכיח כי $\measuredangle CPH = \measuredangle QCH$. המרובע BCB_1C_1 חסום במעגל ונקבל כי $\measuredangle QCH = \measuredangle BB_1C_1$.
מכאן : $\measuredangle B_1HP = \measuredangle CPH$ ולכן $\measuredangle BB_1C_1 = 90° - \measuredangle CPH = \measuredangle QCH$ בדיוק באותה צורה נוכל להוכיח כי $\measuredangle PCH = \measuredangle CQH$ ולכן CH תיכושקף וסיימנו.

5. במשולש חד זוויות לא שווה שוקעים ABC הגבהים A'A ו-B'B נחתכים בנקודה H. תיכוני המשולש ABH נחתכים ב-M. הישר CM חוצה את הקטע A'B'. חשב את גודל הזווית C.

תשובה. 45°.

פתרון. נסמן ב-C_0 את אמצע AB וב-H' את השיקוף של H ביחס ל-C_0. קל לראות כי CH' הוא קוטר במעגל החוסם של ABC (הרי הקטע AH' מקביל לגובה BH ומאונך לצלע AC, לכן הזווית CAH' ישרה, וכך גם הזווית CBH').
המשולשים BB'C ו-AA'C דומים, מכיוון שיש להם



זווית ישרה ועוד זווית משותפת. לכן $\frac{CB}{CB'}=\frac{CA}{CA'}$ ולכן גם המשולשים ABC ו-A'B'C דומים. לכן $\measuredangle B = \measuredangle A'B'C$.

במשולשים הדומים ABC ו-A'B'C הקטעים CM ו-CC_0 מתאימים – הם התיכונים מ-C. מכאן $\measuredangle BCM = \measuredangle ACC_0$. בנוסף

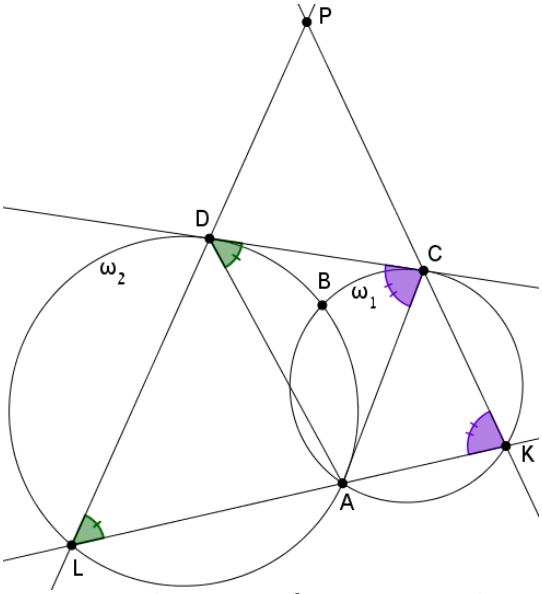
$$\measuredangle ACH' = 180° - \measuredangle CAH' - \measuredangle AH'C =$$
$$= 90° - \measuredangle CH'A = 90° - \measuredangle CBA = \measuredangle BCH$$

ובכן ביחס לחוצה זווית של C, הישר CH סימטרי ל-CH', והישר CM סימטרי ל-CC_0. לכן CM הוא תיכושקף במשולש HCC' בגלל ש-CC_0 הוא תיכון באותו משולש. מפה אנו מקבלים ש-$\frac{H'M}{MH}=\frac{S_{H'MC}}{S_{HMC}}=\frac{CH'^2}{CH^2}$.

אבל $\frac{H'M}{MH}=\frac{H'C_0+C_0M}{2C_0M}=\frac{4C_0M}{2C_0M}=2$. לכן $\frac{CH'}{CH}=\sqrt{2}$.

כבר הסברנו כי CH' הוא קוטר של המעגל החוסם של ABC. אם נצייר מקבילית CHAH", אז גם BH" הוא קוטר של המעגל החוסם מאותה סיבה. במשולש ישר זווית BAH" היתר $CH'=BH"$ ואחד הניצבים $CH=AH"$ קטן פי $\sqrt{2}$. לכן זווית AH"B היא 45°. לכן גם זווית ACB שווה לה, כי הן נשענות על אותה קשת.

6. נתונים שני מעגלים ω_1 ו-ω_2 הנחתכים בנקודות A ו-B. העבירו משיק משותף לשני המעגלים CD (כאשר C ו-D נקודות ההשקה לשני המעגלים בהתאמה, B יותר קרובה ל-CD מאשר A). העבירו ישר דרך A החותך שנית את ω_1 ו-ω_2 בנקודות K ו-L בהתאמה. הישרים KC ו-LD נחתכים בנקודה P. הוכח כי BP תיכושקף במשולש KPL.



פתרון. נבחין כי המשולשים ACD ו-PKL דומים. אכן, $\measuredangle ACD = \measuredangle LKP$, $\measuredangle CDA = \measuredangle PLK$. בנוסף בברור AB תיכון ב-ACD.

נשים לב כי AB הוא תיכון במשולש ACD. אכן, אם AB פוגש את CD ב-M, אז $MC^2 = MB \cdot MA = MD^2$.

נתבונן בהעתקת הדמיון (הרכבה של שיקוף והומותטיה) המעבירה את המשולש ACD למשולש PKL, ואת B ל-B'. אז PB' יהיה תיכון ב-PKL. נשים לב כי $\measuredangle DCB = \measuredangle PKB$ ולכן $\measuredangle LKB' = \measuredangle PKB$ כלומר KB' זה השיקוף של KB ביחס לחוצה זווית K, באותה צורה $\measuredangle KLB' = \measuredangle PLB$ ולכן LB' זה השיקוף של LB ביחס לחוצה זווית L. מפה נובע כי PB' זה השיקוף של PB ביחס לחוצה זווית של P (ישירות ממשפט צ'בה זוויתי) ולכן PB יהיה תיכושקף במשולש PKL בגלל ש-PB' הוא תיכון במשולש PKL.