תרגיל 5

הסדרות פיבונאצ'י $\{f_n\}$ ולוקאס $\{\ell_n\}$ מוגדרות על ידי נוסחאות נסיגה דומות ותנאי התחלה:

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n\,, \quad f_0 = 0\,, \quad f_1 = 1\,;$$
$$\ell_{n+2} = \ell_{n+1} + \ell_n\,, \quad \ell_0 = 2\,, \quad \ell_1 = 1\,.$$

1. הוכיחו את נוסחאות הכפל

$$\ell_m \cdot \ell_n = \ell_{m+n} + (-1)^m \ell_{n-m}$$
$$f_m \cdot \ell_n = f_{m+n} - (-1)^m f_{n-m}$$
$$\ell_m \cdot f_n = f_{m+n} + (-1)^m f_{n-m}$$
$$5 f_m \cdot f_n = \ell_{m+n} - (-1)^m \ell_{n-m}$$

פתרון. ישנם שני סוגים סדרות הנדסיות שמקיימות את אותה נוסחת הנסיגה $\lambda^{n+2} = \lambda^{n+1} + \lambda^n$. זה קשור לשורשים של משוואה ריבועית $\lambda^2 = \lambda + 1$, כלומר

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

לכן גם כל סדרה מסוג $a_n = \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \beta\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ מקיימת את נוסחת הנסיגה $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$. מכאן קל לנחש כי

$$\ell_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

וגם

$$f_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

נוסחאות אלה נקראות נוסחאות בינה (Binet). עבור $n = 0,1$ זה דבר שקל לבדוק, ולכל n אחר זה ברור באינדוקציה. אם נסמן $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ נקבל רישום קצר יותר $f_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}$, $\ell_n = \varphi^n + \psi^n$, כאשר כדאי לזכור כי

$$\varphi + \psi = 1\,, \quad \varphi - \psi = \sqrt{5}\,, \quad \varphi\psi = -1$$

באמצעות נוסחת בינה

$$\ell_m \cdot \ell_n = \left(\varphi^m + \psi^m\right)\left(\varphi^n + \psi^n\right) = \varphi^{m+n} + \psi^{m+n} + \varphi^m\psi^n + \varphi^n\psi^m =$$
$$= \ell_{m+n} + \left(\varphi\psi\right)^m \psi^{n-m} + \varphi^{n-m}\left(\varphi\psi\right)^m = \ell_{m+n} + \left(-1\right)^{m+n}\left(\psi^{n-m} + \varphi^{n-m}\right) =$$
$$= \ell_{m+n} + \left(-1\right)^{m+n}\ell_{n-m}$$

$$f_m \cdot \ell_n = \frac{\varphi^m - \psi^m}{\sqrt{5}} \cdot \left(\varphi^n + \psi^n\right) = \frac{\varphi^{m+n} - \psi^{m+n} + \varphi^m\psi^n - \psi^m\varphi^n}{\sqrt{5}} =$$
$$= \frac{\varphi^{m+n} - \psi^{m+n}}{\sqrt{5}} + \left(\varphi\psi\right)^m \frac{\psi^{n-m} - \varphi^{n-m}}{\sqrt{5}} = f_{m+n} - \left(-1\right)^m f_{n-m}$$

על מנת לקבל נוסחה שלישית צריך להחליף בין m ל-n ולהשתמש בנוסחה

$$f_k = \left(-1\right)^k f_{-k}$$

שמתקבלת בקלות מאינדוקציה או מנוסחאות בינה.

$$5 f_m \cdot f_n = 5 \cdot \frac{\varphi^m - \psi^m}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}} = \left(\varphi^m - \psi^m\right)\left(\varphi^n - \psi^n\right) =$$
$$= \varphi^{m+n} + \psi^{m+n} - \left(\varphi^m\psi^n + \psi^m\varphi^n\right) = \ell_{m+n} - \left(\varphi\psi\right)^m\left(\psi^{n-m} + \varphi^{n-m}\right) =$$
$$= \ell_{m+n} - \left(-1\right)^m \ell_{n-m}$$

2. הוכיחו כי

$$25 f_x f_y f_z f_t = \ell_{x+y+z+t} - \sum_{cyc}\left(-1\right)^x \ell_{-x+y+z+t} +$$
$$+ \left(-1\right)^{z+t}\ell_{x+y-z-t} + \left(-1\right)^{y+z}\ell_{x-y-z+t} + \left(-1\right)^{y+t}\ell_{x-y+z-t}$$

פתרון ראשון. לפי נוסחאות כפל (שאלה 1)

$$25 f_x f_y f_z f_t = \left(5 f_x f_y\right)\cdot\left(5 f_z f_t\right) = \left(\ell_{x+y} + \left(-1\right)^y \ell_{x-y}\right)\left(\ell_{z+t} + \left(-1\right)^t \ell_{z-t}\right) =$$
$$= \ell_{x+y}\ell_{z+t} + \left(-1\right)^t \ell_{z-t}\ell_{x+y} + \left(-1\right)^y \ell_{x-y}\ell_{z+t} + \left(-1\right)^{y+t}\ell_{x-y}\ell_{z-t} =$$
$$= \ell_{x+y+z+t} + \left(-1\right)^{z+t}\ell_{x+y-z-t} + \left(-1\right)^t \ell_{x+y+z-t} + \left(-1\right)^z \ell_{x+y-z+t} +$$
$$+ \left(-1\right)^y \ell_{z+t+x-y} + \left(-1\right)^x \ell_{z+t+y-x} + \left(-1\right)^{y+t}\ell_{x-y+z-t} + \left(-1\right)^{y+z}\ell_{x-y-z+t} =$$
$$= \ell_{x+y+z+t} - \sum_{cyc}\left(-1\right)^x \ell_{-x+y+z+t} +$$
$$+ \left(-1\right)^{z+t}\ell_{x+y-z-t} + \left(-1\right)^{y+z}\ell_{x-y-z+t} + \left(-1\right)^{y+t}\ell_{x-y+z-t}$$

פתרון שני. אם נקבע את x, y, z וננסה לשנות איתי, נראה שגם באגף שמאל וגם באגף ימין יש סדרה מסוג פיבונצ'י, כלומר כזאת שמקיימת נוסחת נסיגה $a_{t+2} = a_{t+1} + a_t$. לכן מספיק לראות שהזהות מתקיימת כאשר $t = 0$ וכאשר $t = 1$, ולכל t אחר זה מתקבל באינדוקציה. באופן דומה מספיק לבדוק למקרים x, y, z כולם 0 או 1.

כדאי לשים לב כי $\ell_n=(-1)^n\ell_n$ (רואים את זה גם מנוסחאות בינה וגם מאינדוקציה פשוטה), ומכאן $(-1)^m\ell_{n-m}=(-1)^n\ell_{m-n}$ (בעצם, רואים את זה גם מנוסחת כפל הראשונה וגם בנוסחת כפל הרביעית בשאלה 1).

אם למשל $x=0$ באגף ימין נקבל 0, אבל גם באגף ימין המחוברים מתקזזים בזוגות של $\ell_{n+x}-\ell_{n-x}$ שמתקזזים כי $x=0$. באופן סימטרי, הזהות תתקיים אם $y=0$ או $z=0$ או $t=0$. נשאר לבדוק את הזהות כאשר $x=y=z=t=1$.

$$25\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1=\ell_4-\sum_{cyc}(-1)^1\ell_2+3\cdot(-1)^2\ell_0$$

$$\ell_0=2\quad\ell_1=1\quad\ell_2=3\quad\ell_3=4\quad\ell_4=7$$

$$25=7+4\cdot3+3\cdot2$$

וזה ברור.

3. הוכיחו כי

$$f_{n+a+b+c+d}\cdot f_{n-a-d}\cdot f_{n-b-d}\cdot f_{n-c-d}-f_{n-a-b-c-2d}\cdot f_{n+a}\cdot f_{n+b}\cdot f_{n+c}=$$
$$=(-1)^{n+a+b+c}\,f_{2n-d}\cdot f_{a+b+d}\cdot f_{b+c+d}\cdot f_{a+c+d}$$

פתרון. באמצעות הנוסחה של שאלה 2 נהפוך את הנוסחה הזאת לצורה

$$\begin{aligned}
&\ell_{4n-2d}-(-1)^{n+a+b+c+d}\ell_{2n-2a-2b-2c-4d}-(-1)^{n+a+d}\ell_{2n+2a}-(-1)^{n+b+d}\ell_{2n+2b}-\\
&-(-1)^{n+c+d}\ell_{2n+2c}+(-1)^{b+c}\ell_{2b+2c+2d}+(-1)^{a+c}\ell_{2a+2c+2d}+(-1)^{a+b}\ell_{2a+2b+2d}-\\
&-\ell_{4n-2d}+(-1)^{n+a+b+c}\ell_{2n+2a+2b+2c+2d}+(-1)^{n+a}\ell_{2n-2d-2a}+(-1)^{n+b}\ell_{2n-2d-2b}+\\
&+(-1)^{n+c}\ell_{2n-2d-2c}-(-1)^{b+c}\ell_{2b+2c+2d}-(-1)^{a+c}\ell_{2a+2c+2d}-(-1)^{a+b}\ell_{2a+2b+2d}=\\
&=(-1)^{n+a+b+c}\Big(\ell_{2n+2a+2b+2c+2d}-(-1)^d\ell_{4d-2n+2a+2b+2c}-(-1)^{a+b+d}\ell_{2n+2c}-\\
&-(-1)^{a+c+d}\ell_{2n+2b}-(-1)^{b+c+d}\ell_{2n+2a}+(-1)^{a+b}\ell_{2c+2d-2n}+\\
&+(-1)^{a+c}\ell_{2b+2d-2n}+(-1)^{b+c}\ell_{2a+2d-2n}\Big)
\end{aligned}$$

איברים באותו צבע מתקזזים.

4. הוכיחו כי: $2\cdot\left(f_{n-1}^{\,4}+f_n^{\,4}+f_{n+1}^{\,4}\right)=\left(f_{n-1}^{\,2}+f_n^{\,2}+f_{n+1}^{\,2}\right)^2$.

פתרון. באופן כללי, אם יש 3 מספרים a,b,c המקיימים $a+b=c$, אז מתקיימת הזהות

$$2\left(a^4+b^4+c^4\right)=\left(a^2+b^2+c^2\right)^2$$

בפרט, $f_{n-1}+f_n=f_{n+1}$ לכן זהות זאת מתקיימת.

דרך אחרת לרשום את הזהות זה לפתוח סוגריים ולהעביר הכול ימינה:

$$0=\sum_{cyc}\left(2a^2b^2-a^4\right)$$

דרך לקבל זהות זאת זה לפתוח סוגריים במכפלה

$$\begin{aligned}&(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)=\\&=\left((a+b)^2-c^2\right)\left(c^2-(a-b)^2\right)=\left(2ab+a^2+b^2-c^2\right)\left(2ab-a^2-b^2+c^2\right)=\\&=(2ab)^2-\left(a^2+b^2-c^2\right)^2=4a^2b^2-2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4=\\&=2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4\end{aligned}$$

ברור, שאם $c=a+b$ מתאפס אגף שמאל וכך גם אגף ימין.

נוסחה זאת ידוע בתור נוסחת הרון, היא מקשרת גם בין צלעות המשולש לשטח:

$$16S^2=2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4$$

5. הוכיחו כי: א. $f_{n+k}\cdot f_{n-k}=f_n{}^2-(-1)^{n-k}\cdot f_k{}^2$.

ב. $\ell_n{}^2-5\cdot f_n{}^2=4\cdot(-1)^n$.

פתרון. א. נזכיר את נוסחת הכפל: $5f_m\cdot f_n=\ell_{m+n}-(-1)^m\ell_{n-m}$. נשתמש בה, לאחר שנכפיל ב-5 את שני האגפים בזהות שצריך להוכיח:

$$\ell_{2n}-(-1)^{2k}\cdot\ell_{2k}=\left(\ell_{2n}-(-1)^n\ell_0\right)-(-1)^{n-k}\left(\ell_{2k}-(-1)^k\ell_0\right)$$

ואז הכול מתקזז.

ב. אפשר גם להשתמש בנוסחת המכפלה, אבל אפשר להשתמש בנוסחה $\ell_n=f_{n+1}-f_{n-1}$

$$\begin{aligned}&\ell_n{}^2-5\cdot f_n{}^2=(f_{n+1}+f_{n-1})^2-5(f_{n+1}-f_{n-1})^2=-4f_{n+1}^2-4f_{n-1}^2+12f_{n+1}f_{n-1}=\\&=4\left(f_{n+1}f_{n-1}-(f_{n+1}-f_{n-1})^2\right)=4\left(f_{n+1}f_{n-1}-f_n^2\right)=4\cdot(-1)^n\end{aligned}$$

כאן משתמשים בזהות $f_{n+1}f_{n-1}-f_n^2=(-1)^n$ שיש לה הרבה הוכחות, כולל גם זה שהיא מקרה פרטי של הסעיף הקודם עבור $k=1$, אבל גם יש הוכחה יותר פשוטה עם אינדוקציה על n וגם עם שטח המקבילית.

6. הוכיחו כי $f_{n-3}\cdot f_{n-2}\cdot f_{n-1}\cdot f_{n+1}\cdot f_{n+2}\cdot f_{n+3}+\ell_n{}^2=f_n{}^2\cdot\left(2\cdot f_{n-1}\cdot f_{n+1}-f_n{}^2\right)^2$.

פתרון. נשתמש במקרים פרטיים של שאלה סעיף א' של שאלה 5 עבור $k=1,2,3$:

$$f_{n+1}\cdot f_{n-1}=f_n^{\,2}+(-1)^n$$

$$f_{n+2}\cdot f_{n-2}=f_n^{\,2}-(-1)^n$$

$$f_{n+3}\cdot f_{n-3}=f_n^{\,2}+(-1)^n\cdot 4$$

נזכיר גם את סעיף ב' $\ell_n^{\,2}=5\cdot f_n^{\,2}+4\cdot(-1)^n$

לשם קיצור נסמן $\mu=f_n^{\,2}$, $\nu=(-1)^n$ (נזכור ש-$\nu^2=1$). אז

$$f_{n-3}\cdot f_{n-2}\cdot f_{n-1}\cdot f_{n+1}\cdot f_{n+2}\cdot f_{n+3}+\ell_n^{\,2}=(\mu+\nu)(\mu-\nu)(\mu+4\nu)+5\mu+4\nu=$$
$$=(\mu^2-\nu^2)(\mu+4\nu)+5\mu+4\nu=(\mu^2-1)(\mu+4\nu)+5\mu+4\nu=$$
$$=\mu^3+4\nu\mu^2+4\mu=\mu\cdot(\mu+2\nu)^2=\mu\big(2(\mu+\nu)\mu-\mu\big)^2=$$
$$=f_n^{\,2}\cdot\big(2\cdot f_{n-1}\cdot f_{n+1}-f_n^{\,2}\big)^2$$