תרגיל 5

הסדרות פיבונאצ'י $\{f_n\}$ ולוקאס $\{\ell_n\}$ מוגדרות על ידי נוסחאות נסיגה דומות ותנאי התחלה:

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n\,, \quad f_0 = 0\,, \quad f_1 = 1\,;$$
$$\ell_{n+2} = \ell_{n+1} + \ell_n\,, \quad \ell_0 = 2\,, \quad \ell_1 = 1\,.$$

1. הוכיחו את נוסחאות הכפל

$$\ell_m \cdot \ell_n = \ell_{m+n} + (-1)^m \ell_{n-m}$$
$$f_m \cdot \ell_n = f_{m+n} - (-1)^m f_{n-m}$$
$$\ell_m \cdot f_n = f_{m+n} + (-1)^m f_{n-m}$$
$$5 f_m \cdot f_n = \ell_{m+n} - (-1)^m \ell_{n-m}$$

2. הוכיחו כי

$$25 f_x f_y f_z f_t = \ell_{x+y+z+t} - \sum_{cyc} (-1)^x \ell_{-x+y+z+t} +$$
$$+ (-1)^{z+t} \ell_{x+y-z-t} + (-1)^{y+z} \ell_{x-y-z+t} + (-1)^{y+t} \ell_{x-y+z-t}$$

3. הוכיחו כי

$$f_{n+a+b+c+d} \cdot f_{n-a-d} \cdot f_{n-b-d} \cdot f_{n-c-d} - f_{n-a-b-c-2d} \cdot f_{n+a} \cdot f_{n+b} \cdot f_{n+c} =$$
$$= (-1)^{n+a+b+c} f_{2n-d} \cdot f_{a+b+d} \cdot f_{b+c+d} \cdot f_{a+c+d}$$

4. הוכיחו כי: $2 \cdot \left(f_{n-1}^4 + f_n^4 + f_{n+1}^4 \right) = \left(f_{n-1}^2 + f_n^2 + f_{n+1}^2 \right)^2$.

5. הוכיחו כי: א. $f_{n+k} \cdot f_{n-k} = f_n^2 - (-1)^{n-k} \cdot f_k^2$.

ב. $l_n^2 - 5 \cdot f_n^2 = 4 \cdot (-1)^n$.

6. הוכיחו כי $f_{n-3} \cdot f_{n-2} \cdot f_{n-1} \cdot f_{n+1} \cdot f_{n+2} \cdot f_{n+3} + l_n^2 = f_n^2 \cdot \left(2 \cdot f_{n-1} \cdot f_{n+1} - f_n^2 \right)^2$.