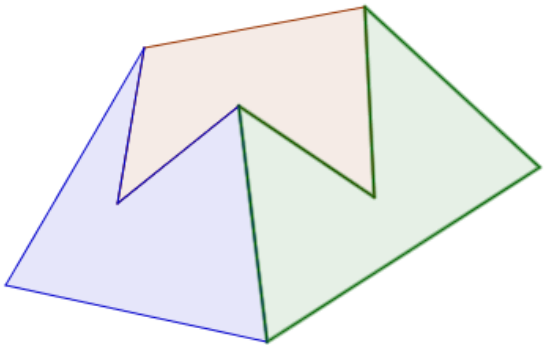
תרגיל 4

1. האם ניתן לחתוך איזשהו מצולע קמור
א. למחומשים שאף אחד מהם לא קמור?
ב. למרובעים שאף אחד מהם לא קמור?



פתרון. א. כן למשל

ב. לא.

נניח שכן. אנחנו נמדוד זוויות של כל מצולעים שמופנות פנימה, כלומר זוויות יכולה להיות גדולה מ- 180°. בכל מרובע של חלוקה סכום זוויות קטן מ- 180°.

לזוויות שגדולות מ- 180° נקרא זוויות מוגזמות, לזוויות אחרות נקרה זוויות רגילות. בכל מרובע לא קמור יש זוויות מוגזמת ו-3 זוויות רגילות, וסכומם 180°. בכל נקודה שיש בה זוית מוגזמת יש גם זוויות רגילות, וסכום של כל הזוויות שנפגשות בנקודה הזאת שווה 360°. בכל זוית של המצולע הגדול של ובכל מקום שבהם נפגשים זוויות של מצולעים בסמוך לצלע יש רק זוויות רגילות. לכן אם נסכם על כל הזוויות המוגזמות של מרובע של 360° פחות הזוויות המוגזמת, נקבל מספר יותר קטן מסכום הזוויות של כל המרובעים (כאשר סופרים לפי נקודות). מצד שני זה בדיוק המספר שצריך להתקבל (כאשר סופרים לפי מרובעים).

2. במישור סומנו 6 נקודות אדומות. בנוסף מסמנים גם נקודות כחולות, שהן האמצעים של כל הקטעים שקצותיהם הן נקודות אדומות.
א. מה הוא המספר הקטן ביותר של נקודות מסומנות (כחולות ואדומות יחד)?
ב. מה הוא המספר הקטן ביותר של נקודות מסומנות, אם אף 3 נקודות אדומות לא נמצאות על ישר אחד?

תשובה. א. 11. ב. 18.

פתרון. א. אם נסדר את כל הנקודות על ישר אחד במרווחים של 1, הנקודות הכחולות יהיו או נקודות האדומות או האמצעים של מרוויחים, כי המרחקים בין הנקודות חצי-שלמים. לכן נקבל 5 נקודות נוספות, סה"כ 11 נקודות.

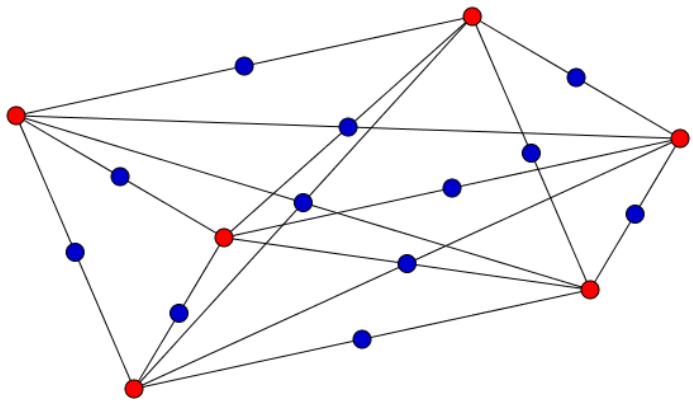
נוכיח שתמיד יהיו לפחות 11 נקודות. בין 6 נקודות אדומות יש מספר סופי של קטעים. יש מספר אינסופי של כיוונים לישרים. לכן קיים ישר שלא מקביל לאף אחד מהקטעים האלה. אם נסובב את התמונה כך שיש זה יהיה אופקי, אז כל הנקודות תהינה בגובה שונה. נמספר את הנקודות מלמעלה למעטה. אז נקודות האמצע בין נקודה מספר k לנקודה מספר $k+1$ היא נמוכה יותר מנקודה k וגבוהה יותר מנקודה $k+1$. כך נוצרים עוד 5 נקודות כחולות שהן שונות מהנקודות האדומות וזו מזו, אפילו לפי גובה.

ב. אם אף שלוש נקודות לא על ישר אחת, אין נקודה שהיא גם כחולה וגם אדומה; לו נקודה אדומה הייתה נקודת אמצע של שתי נקודות אדומות, 3 נקודות היו על ישר אחד.

סה"כ יש 15 קטעים, ויש להם 15 אמצעים; על מנת שיהיו פחות מ-15 נקודות כחולות חלק מהאמצעים צריכים להתלכד. אם אמצעים של שני קטעים מתלכדים, ואף 3 נקודות לא על ישר אחד, אז 4 הנקודות יוצרות מקבילית. על מנת ליצור מקבילית, צריך שני זוגות של צלעות מקבילות.

יתכן שיש אפילו 3 קטעים מקבילים עם קצוות אדומים, כלומר יש 3 ישרים מקבילים שמכסים את כל הנקודות האדומות. נדבר על מקרה זה בהמשך, אבל נניח קודם שזה לא קורה.

אז מבין 15 קטעים יש לכל היותר 7 של קטעים מקבילים, ואז יש לכל היותר 3 מקביליות. לכן או שמבין 15 אמצעים יש 3 זוגות ששל אמצעים שמתלכדים, ואז יש בכל מקר לפחות 12 נקודות כחולות, או שיש 3 אמצעים שמתלכדים, שזה כבר מצריך 3 מקביליות ואלה מקביליות יחידות שיש, ואז יש לפחות 13 נקודות כחולות.



בכל מקרה, קל לבנות דוגמה כאשר נקודות אדומות הן קצוות של 3 קטעים מקבילים ושווים, ואז יש 3 מקביליות ו-3 זוגות של אמצע קטעים שמתלכדים.

נתבונן במקרה שיש 3 קטעים מקבילים. ניתן לסובב את התמונה כך שהקטעים האלה יהיו אופקיים. על הקטע הנמוך ביותר נמצאות נקודות אדומות A ו-B; על הקטע הבינוני נקודות C ו-D, ועל הקטע העליון נקודות E ו-F; נניח גם ש-A היא משמאל ל-B, C משמאל ל-D, E משמאל ל-F.

נקודה כחולה שהיא באמצע בין A ל-B היא באותו גובה כמו A ו-B.

נקודות אמצע בין A ל-C, בין A ל-D, בין B ל-D נמצאות בגובה ממוצעי בין קטע AB ו-CD, והן נקודות שונות (מסודרות משמאל לימין). אלה 3 נקודות נוספות. באותו גובה גם נמצאת נקודה אמצעית בין B ל-C אבל יתכן שהיא מתלכד אם נקודה אמצעית בין A ל-D, זה יתכן רק במקרה ש-AB = CD.

נקודות אמצע בין A ל-E, בין A ל-F, בין B ל-F הן גם נקודות שונות, והן בגובה ממוצעי בין קטע AB לקטע EF. באותו גובה גם אמצע הקטע BE אבל נקודה זו יכולה להתלכד עם אמצע AF, אבל רק אם EF = AB. בכל מקרה, 3 נקודות או 4 אלה שונות מנקודות כחולות קודמות שתיארנו כי הן יותר גבוהות.

נקודות אמצע בין C ל-E, בין C ל-F, בין D ל-F הן גם נקודות שונות, והן בגובה ממוצעי בין קטע CD לקטע EF. באותו גובה גם אמצע הקטע DE אבל נקודה זו יכולה להתלכד עם אמצע CF, אבל רק אם EF = CD. בכל מקרה, 3 נקודות או 4 אלה שונות מנקודות כחולות קודמות שתיארנו כי הן יותר גבוהות.

נקודת אמצע ביר E ל-F היא עוד יותר גבוהה.

קיבלנו לפחות 1+3+3+3+1 = 11 נקודות כחולות שונות, ואם הקטעים AB, CD, EF לא כולם שונים אז אפילו יותר. אבל דוגמה עבור 12 נקודות כבר מצאנו. לכן ניתן לבדוק האם יתכן שיש 11 נקודות כחולות, במקרה שהקטעים AB, CD, EF שווים ומקבילים. לא דיברנו עדיין על נקודת האמצע של CD. מבחינת גובה שלה, מבין הנקודות שדיברנו עליהן, היא יכולה להיות ברק בגובה של אמצעים של AE, AF, BE, BF. אבל במקרים אלה די קל לראות שיהיו 3 נקודות על ישר אחד.

אכן, במקרים האלה הקווים AB ו-EF נמצאים באותו מרחק מהישר CD. נניח כי אמצע של קטע עם קצוות אדומים שאחד מהם A או B והאחר E או F הוא גם אמצע של CD. אם נחליף קצה אחד של קטע בנקודה אדומה אחרת על אותו קו אופקי, האמצע יזוז בחצי של CD לצד זה או אחר, ונקבל שאמצע של קטע עם קצוות אדומים הוא C או D, וזה לא יתכן.

3. לכל קבוצה סופית של נקודות מסומנות במישור, לכל נקודה מסומנת P נגדיר $m(\mathrm{P})$ כמות הנקודות המסומנות האחרות שנמצאות במרחק מינימאלי ממנה, ו-$M(\mathrm{P})$ כמות הנקודות המסומנות שנמצאות במרחק מקסימאלי ממנה. לכל קבוצה סופית של נקודות נגדיר m ו-M שהם הערכים הכי קטנים של $m(\mathrm{P})$ ושל $M(\mathrm{P})$ בהתאמה מבין כל הנקודות המסומנות. מצאו את הערכים הגדולים ביותר האפשריים של m ו-M (כלומר, צריך למצוא קבוצה בה m הכי גדול, במילים אחרות לכל נקודה יש לפחות m מרחקים מינימאליים כאשר m גדול ככל האפשר, ובאופן דומה קבוצה בה M הכי גדול).

תשובה. $m=3$, $M=2$.

פתרון. נתחיל מ-m. עם נסמן למשל 7 נקודות: קודקודים של משושה משוכלל ומרכזו, אז עבור כל נקודה פינתית יש 3 נקודות הכי קרובות, ועבור נקודת מרכז יש אפילו 6, לכן $m=3$ במקרה זה.

יהיה μ מרחק הכי קטן שיש בין נקודות. נצבע באדום נקודות מסומנות שיש להן מרחק μ. אז כל המרחקים הכי הקטנים של נקודות אלו הם μ, והן רק לנקודות אדומות. לכן ניתן להסתכל רק על נקודות אדומות.

נתבונן בקמור של נקודות אדומות. יהיה A קודקוד של הקמור. נצייר מעגל שמרכזו A ורדיוסו μ. כל הנקודות האדומות על המעגל הזה נמצאות בחצי אחד של מעגל ללא קצוות, ואבל במרחק לפחות μ זו מזו לכן המרחק הקשתי הוא לפחות 60°, לכן ליד A יש לכל היותר 3 נקודות אדומות.

כעת נתעסק ב-M. קל למצוא דוגמאות ש-M הוא 2. למשל קודקודי מצולע משוכלל בעל מספר אי-זוגי של צלעות. השאר להוכיח שזה המקסימום, כלומר שתמיד יש נקודה עם לכל היותר שני מרחקים מכסימליים.

יהא L מרחק גדול ביותר שיש בין שני נקודות. לכל נקודה שיש לה מרחק L, כל הנקודות מרוחקות ביותר שלה נמצאות במרחק L. אנחנו נצבע בוורוד נקודות שיש להן מרחק L, ואם יש קבוצה עם $M\geq 3$ אז גם הקבוצה של הנקודות הוורודות היא כזאת.

ובכן, ניתן להניח שמרחקים גדולים ביותר מכל נקודה הם באורך L. נוכיח טענה כזאת: עם A, B, C ו-D הן נקודות מסומנות שונות, ואורכי AB ו-CD שווים ל-L, אז AB ו-CD נחתכים.

נניח שלא. יש שני מקרים: הקמור של A, B, C ו-D הוא מרובע או משולש. אם הוא מרובע, אז AB ו-CD הם שתי צלעות נגדיות, אבל סכום אלכסונים גדול מסכום של שני צלעות נגדיות, לכן יש אלכסון שאורכו גדול מ-L, בסתירה להנחה שמרחק הכי גדול בין נקודות מסומנות הוא L.

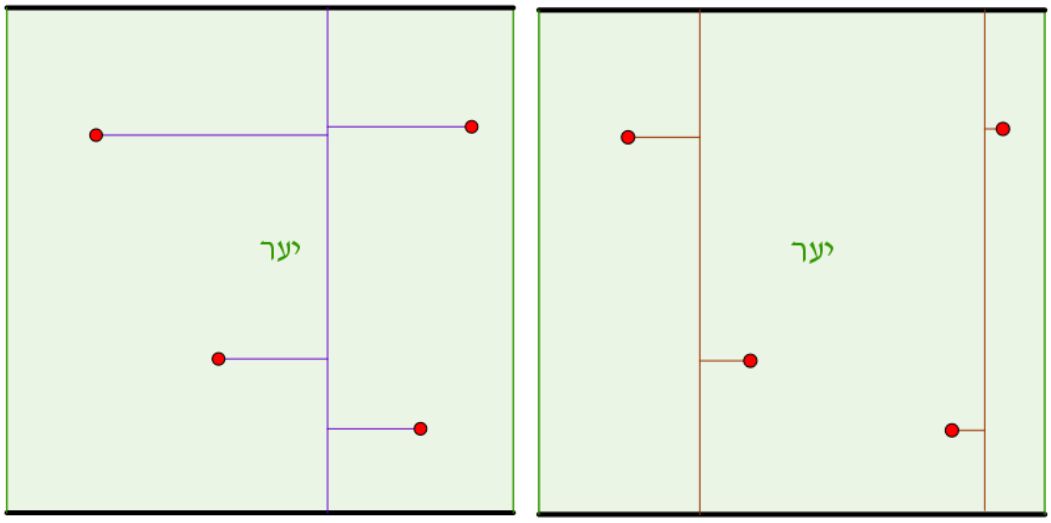
המקרה האחר שיש הוא שהקמור הוא משולש, למשל ABC. אז קל לראות שהקטע CD קטן יותר או מ-AC או מ-BC, שוב בסתירה להנחה שמרחק הכי גדול בין נקודות מסומנות הוא L.

ובכן, כל שני 'טעים הכי ארוכים נחתכים. ניקח נקודה כלשהי T. עבורה יש 3 נקודות במרחק L, והן X, Y ו-Z. הזוויות בין TX, TY ו-TZ הן חדות. ניתן להניח לה"כ כי TY נמצאת בין TX ל-TZ. אז כל קטע באורך L בין Y לנקודה מסומנת אחרת צריך לחתוך את TX גם את TZ לפי הטענה שהוכחנו, אבל זה לא אפשרי.

4. יער הוא ריבוע שכל צלע שלו 10 קילומטרים. שתי צלעות נגדיות של יער הן כבישים מהירים. בתוך היער סומנו 4 נקודות. הוכיחו כי ניתן לסלול בתוך היער מספר שבילים, שהם קטעים שמקבילים לצלעות הריבוע, כך שיהיה אפשר להגיע מכל נקודה מסומנת לכל כביש באמצעות השבילים (בלי ללכת לאורך הכבישים המהירים), כך שהאורך הכולל של השבילים לא יעלה על 25 קילומטרים.

פתרון. נניח שכבישים המהירים הם הצד הדרומי והצפוני.

נחשוב על שתי דרכים לסלול שבילים:



בשיטה ראשונה יש שני שבילים אנכיים, ולכל אחד מחוברים שתי נקודות בשבילים אופקיים, ובשיטה שנייה שביל אנכי אחד שאורכו 10 ק"מ, מכל מחוברים שתי נקודות באמצעות שבילים אופקיים. אנחנו נוכיח שאחת משתי השיטות תעבוד.

נגיד שהמרחקים מהנקודות המסומנות לצד המערבי של היער הם $a \le b \le c \le d$ קילומטרים. כאשר משתמשים בשיטה הראשונה, האורך הכולל של השבילים האופקיים הוא $d-c+b-a$ קילומטרים, והשבילים האנכיים 20 קילומטרים. בשיטה השנייה שבילים האופקיים הם $d+c-b-a$ קילומטרים, והשביל האנכים הוא 10 קילומטרים.

אם שתי השיטות לא עובדות אז

$$d-c+b-a>5$$

$$d+c-b-a>15$$

מחצית הסכום של שני אי-שוויונים אלה הוא $d-a>10$ אבל זה לא יתכן, הרי $d<10$, ו-a חיובי. סתירה.

5. מצאו פאון קמור במרחב עם כמות מרבית של קודקודים, שכל קודקודיו הן נקודות שלמות, בתוכו, על פאותיו ועל מקצועותיו אין נקודות שלמות נוספות (נקודה נקרת שלמה, אם 3 הקואורדינאטות שלה שלמות).

תשובה. 8.

פתרון. דוגמה לפאון כזה היא קוביית יחידה: קמור של נקודות שכל אחת מהקואורדינאטות שלהן 0 או 1.

נניח שיש פאון P שיש לו 9 קודקודים. נצבע נקודות ב-8 צבעים, בהתאם לזוגיות של קואורדינאטות. יהיו שתי נקודות באותו צבע. כלומר סכום הווקטורים זוגי, וממוצע שלם, לכן נקודת האמצע היא שלמה. זו תהיה נקודה שלמה נוספת שהיא בפנים, או על הפאה או על המקצוע בניגוד להנחה.

6. תהיה S קבוצה סופית של נקודות $n \ge 3$ נקודות במרחב. לכל שתי נקודות ב-S, ניתן לבחור מישור שהוא האנך האמצעי של הקטע שמחבר אותם. מצאו את כל הקבוצות S שהן סימטרית ביחס לכל המישורים שמתקבלים, לכל הזוגות של נקודות ב-S.

תשובה. קודקודים של מצולע משוכלל מישורי, או ארבעון משוכלל או תמניון משוכלל.

פתרון. מרכז מסה של הקבוצה יסומן O. ברור ש-O עובר לעצמו בכל שיקוף. לכן O נמצא במרחק שווה מכל הנקודות ב-S. לכן כל הנקודות נמצאות על קליפה כדורית שמרכזה ב-O.

נניח שבמישור כלשהו יש יותר משתי נקודות. אנו נוכיח שנקודות אלה יוצרות מצולע משוכלל. קודם כל, ברור שנקודות נמצאות על מעגל שמתקבל מחיתוך של מישור עם הקליפה הכדורית. הנקודות מחלקות אל המעגל למספר קשתות. אנו נוכיח שאלה קשתות שוות אורך. אכן, נניח שלא כולן שוות אורך. אז יש גם שתי קשתות סמוכות שהן לא באותו אורך, כלומר על המעגל יש 3 נקודות ברצף A, B ו-C כך שהקשת AB לא שווה לקשת BC. אז שיקוף ביחס לאנך האמצעי של AC משאיר את הקשת AC במקום, לכן B נמצא על האנך האמצעי של AC. לכן הקשתות בכל זאת שוות.

במקרה שכל הנקודות נמצאות על מישור אחד, מקבלים שזה רק מצולע משוכלל, וקל לראות שמצולע משוכלל מקיים את התנאים.

נשאר לבדוק מקרה שבו לא כל הנקודות במישור אחד. נניח שמרחק הקצר ביותר שיש בין שתי נקודות ב-S הוא המרחק בין A ל-B. לכל נקודה נוספת X ב-S, ניתן להעביר מישור דרך A, B ו-X, ומישור זה יחתוך את S במצולע משוכלל. אחת הצלעות של מצולע משוכלל זה היא AB, צלע אחרת היא AZ. נקודה Z נמצאת על באותו מרחק מ-A כמו B.

עבור נקודות X שונות נקבל נקודות Z שונות, אלה אם כן כל הנקודות נמצאות במישור אחד. נתבונן בכל הנקודות על הקליפה הכדורית שנמצאות במרחק AB מ-A. זה מעגל מישורי, שרדיוסו קטן מ-AB. אם לא כל הנקודות ב-S במישור אחד, נקבל לפחות 3 נקודות על מעגל זה. לכן יש במעגל זה מצולע משוכלל. צלעות המצולע גדולות או שוות ל-AB, כלומר גדולות מרדיוס המעגל. לכן במצולע זה יש 3, 4 או 5 קודקודים.

ובכן לנקודה A יש 3, 4 או 5 נקודות הכי קרובות יוצרות סביבה מצולע משוכלל. זה נכון גם לכל נקודה אחרת ב-S, יש סביבה אותה כמות של נקודות הכי קרובות ובאותו מרחק ממנה, כי באמצעות שיקוף שמשמר את S. נחבר על הקליפה הכדורית את הנקודות הקרובות ביותר של S באמצעות קשות של מעגלים גדולים. אז הקליפה מחולקת לאזורים, שכל הצלעות שלהן זהות וכל הזוויות אותו דבר. כלומר מקבלים פאון משוכלל.

אנחנו מכירים את כל הפאונים המשוכללים. בדיקה פשוטה מראה שרק שניים מהם עובדים (ארבעון ותמניון), ובאחרים השיקוף ביחס לאנך אמצעי של שני נקודות הכי רחוקות לא משמר את קבוצת הקודקודים.