תרגיל 4

1. האם ניתן לחתוך איזשהו מצולע קמור
א. למחומשים שאף אחד מהם לא קמור?
ב. למרובעים שאף אחד מהם לא קמור?

2. במישור סומנו 6 נקודות אדומות. בנוסף מסמנים גם נקודות כחולות, שהן האמצעים של כל הקטעים שקצותיהם הן נקודות אדומות.
א. מה הוא המספר הקטן ביותר של נקודות מסומנות (כחולות ואדומות יחד)?
ב. מה הוא המספר הקטן ביותר של נקודות מסומנות, אם אף 3 נקודות אדומות לא נמצאות על ישר אחד?

3. לכל קבוצה סופית של נקודות מסומנות במישור, לכל נקודה מסומנת P נגדיר $m(\mathrm{P})$ כמות הנקודות המסומנות האחרות שנמצאות במרחק מינימאלי ממנה, ו-$M(\mathrm{P})$ כמות הנקודות המסומנות שנמצאות במרחק מקסימאלי ממנה. לכל קבוצה סופית של נקודות נגדיר m ו-M שהם הערכים הכי קטנים של $m(\mathrm{P})$ ושל $M(\mathrm{P})$ בהתאמה מבין כל הנקודות המסומנות. מצאו את הערכים הגדולים ביותר האפשריים של m ו-M (כלומר, צריך למצוא קבוצה בה m הכי גדול, במילים אחרות לכל נקודה יש לפחות m מרחקים מינימאליים כאשר m גדול ככל האפשר, ובאופן דומה קבוצה בה M הכי גדול).

4. יער הוא ריבוע שכל צלע שלו 10 קילומטרים. שתי צלעות נגדיות של יער הן כבישים מהירים. בתוך היער סומנו 4 נקודות. הוכיחו כי ניתן לסלול בתוך היער מספר שבילים, שהם קטעים שמקבילים לצלעות הריבוע, כך שיהיה אפשר להגיע מכל נקודה מסומנת לכל כביש באמצעות השבילים (בלי ללכת לאורך הכבישים המהירים), כך שהאורך הכולל של השבילים לא יעלה על 25 קילומטרים.

5. מצאו פאון קמור במרחב עם כמות מרבית של קודקודים, שכל קודקודיו הן נקודות שלמות, בתוכו, על פאותיו ועל מקצועותיו אין נקודות שלמות נוספות (נקודה נקרת שלמה, אם 3 הקואורדינאטות שלה שלמות).

6. תהיה S קבוצה סופית של נקודות $n \geq 3$ נקודות במרחב. לכל שתי נקודות ב-S, ניתן לבחור מישור שהוא האנך האמצעי של הקטע שמחבר אותם. מצאו את כל הקבוצות S שהן סימטרית ביחס לכל המישורים שמתקבלים, לכל הזוגות של נקודות ב-S.