תרגיל 3

$\mathbb{N}$ היא קבוצה של מספרים שלמים גדולים מ-0. כל פונקציה היא $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ אלה אם כן נאמר אחרת. בכל דוגמה, אם לא נאמר אחרת, צריך למצוא את כל הפונקציות שמקיימות את כל התנאים.

1. עבור פונקציה f, נגדיר $f^{[k]}(n)=f\left(f\left(...f(n)...\right)\right)$, כאשר משתמשים בפונקציה f בדיוק k פעמים. מצאו $k>1$ קטן ביותר, עבורו קיימת פונקציה שמקיימת $f^{[k]}(n)=n+5777$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

פתרון. מהמשוואה ברור, שפונקציה f היא חח"ע. נשים לב כי

$$f(n)+5777=f^{[k]}\left(f(n)\right)=f^{[k+1]}(n)=f\left(f^{[k]}(n)\right)=f(n+5777)$$

מכאן מתקבל באינדוקציה על m כי $f(n)+5777\cdot m=f(n+5777\cdot m)$.

לכן f מעבירה סדרה חשבונית מסוג $a+m\cdot 5777$ לסדרה חשבונית $f(a)+m\cdot 5777$. כלומר כל המספרים מספיק גדולים שנותנים שארית מסוימת מודולו 5777 נותנים את כל המספרים גדולים מספיק שנותנים שארית מסוימת מודולו 5777. היות ו- f פונקציה חח"ע, זה מגדיר תמורה על שאריות מודולו 5777.

נוכיח, שלא יכול להיות שפונקציה זו מעבירה שארית כלשהי לאותה שארית. אם יש a עבורו $f(a)=a+b\cdot 5777$ אז

$$f\left(f(a)\right)=f(a+b\cdot 5777)=f(a)+b\cdot 5777=a+b\cdot 5777$$

ובאופן דומה באינדוקציה $f^{[k]}(a)=a+k\cdot b\cdot 5777$. אבל $f^{[k]}(a)=a+5777$. לכן $k\cdot b=1$. אבל זה לא יתכן, כי נתון ש-$k>1$, והמספרים k ו-b שלמים.

לכן יש לנו תמורה על שאריות מודולו 5777, ואף שארית לא עוברת לעצמה.

אבל לאחר k הפעלות כל שארית חוזרת לעצמה. לכן מסלול של כל שארית הוא מחלק של k. אנחנו נוכיח שזה חייב להיות k. אם מסלול של שארית כלשהי הוא d, שהוא מחלק של k אבל קטן מ-k, כלומר קיים $c>1$ שלם כך ש-$cd=k$ אז נקבל

$$f^{[d]}(a)=a+b\cdot 5777$$

ואז כמו קודם $a+5777=f^{[k]}(a)=f^{[c\cdot d]}(a)=a+bc\cdot 5777$ אבל אז $bc=1$ אבל $c>1$ וזה לא יתכן. לכן בעצם אורך של כל מסלול של שאריות הוא בדיוק k.

לכן ניתן לחלק קבוצה של 5777 שאריות למסלולים בגודל k. לכן 5777 מתחלק ב-k. אבל כידוע, פירוק של 5777 לגורמים ראשוניים הוא $5777=53\cdot 109$. לכן ל-k יש רק 3 ערכים אפשריים: 53, 109, ו-5777. כל הערכים האלה אפשריים, כמו שרואים למשל בעזרת הפונקציות $f(n)=n+109$, $f(n)=n+53$ ו-$f(n)=n+1$ בהתאמה.

2. $f\left(n^2 f\left(m\right)\right)=m\cdot f\left(n\right)^2$. מצאו את המינימום של $f\left(1998\right)$.

פתרון. קל לראות שפונקציה היא חח"ע, כי אם נציב ערכים שונים עבור m שבהם $f\left(m\right)$ זהה, אגף שמאל יהיה זהה ואגף ימין לא.

נציב $m=1$ ונקבל $f\left(n^2 f\left(1\right)\right)=f\left(n\right)^2$.

נציב $n=1$ ונקבל $f\left(f\left(m\right)\right)=m\cdot f\left(1\right)^2$.

נסמן לשם קיצור $f\left(1\right)=a$, ואז שתי המשוואות מתקצרות:

$$f\left(a\cdot n^2\right)=f\left(n\right)^2 \qquad (1)$$

$$f\left(f\left(m\right)\right)=a^2 m \qquad (2)$$

נציב ב-(1) את $n=ak$ ונקבל על ידי שימוש נוסף ב-(1)

$$a^2 f\left(k\right)^2=a^2 f\left(ak^2\right)=f\left(a^3\cdot k^2\right)=f\left(ak\right)^2$$

$$a\cdot f\left(k\right)=f\left(ak\right) \qquad (3)$$

נציב במשואה המקורית $m=f\left(k\right)$ ונקבל

$$a^2 f\left(n^2 k\right)=f\left(n^2\cdot a^2 k\right)=f\left(k\right)\cdot f\left(n\right)^2$$

נציב $k=s^2$ ונקבל $a^2 f\left(n^2 s^2\right)=f\left(s^2\right)\cdot f\left(n\right)^2$ (4)

אגף ששאל סימטרי ב-n ו-s, ולכן $f\left(n^2\right)\cdot f\left(s\right)^2=f\left(s^2\right)\cdot f\left(n\right)^2$. לכן

$$\frac{f\left(n^2\right)}{f\left(n\right)^2}=\frac{f\left(s^2\right)}{f\left(s\right)^2}=\frac{f\left(1^2\right)}{f\left(1\right)^2}=\frac{a}{a^2}$$

$$a\cdot f\left(n^2\right)=f\left(n\right)^2 \qquad (5)$$

לכן הביטי (5) מקבל צורה יותר פשוטה $a^3\cdot f\left(ns\right)=a\cdot f\left(s\right)^2\cdot f\left(n\right)^2$ או

$$a^2\cdot f\left(ns\right)=f\left(s\right)^2\cdot f\left(n\right)^2$$

$$a\cdot f\left(ns\right)=f\left(s\right)\cdot f\left(n\right) \qquad (6)$$

קל לראות, שהמשוואה המקורית נובעת מהמשוואות (2) ו-(6) ולכן אפשר לשכוח מהמשוואה המקורית ולעבוד רק עם המשוואות החדשות.

מ-(6) נקבל באינדוקציה $a^{k-1}\cdot f\left(n^k\right)=\left(f\left(n\right)\right)^k$.

לכל ראשוני p, אם a מתחלק ב-p^m, אז אגף שמאל מתחלק ב-$p^{m(k-1)}$, ולכן גם אגף ימין, לכן $f\left(n\right)$ מתחלק ב-p^u כאשר $m\left(k-1\right)\le uk$ ולכן

$$m\le u\cdot\frac{k}{k-1}=u\left(1+\frac{1}{k-1}\right)$$

ואי-שוויון זה מתקיים לכל k. אם $k-1>u$ נקבל $m\le u$. כלומר $f\left(n\right)$ מתחלק בכל חזקה של ראשוני, שבה מתחלק a. לכן $f\left(n\right)$ מתחלק ב-a.

לכן ניתן לכתוב $f\left(n\right)=a\cdot g\left(n\right)$, כאשר גם g פונקציה עם ערכים טבעיים. לפי (7)

$$g\left(n\right)\cdot g\left(m\right)=g\left(mn\right)$$

ולפי (2) נקבל

$$a^2\cdot g\left(g\left(m\right)\right)=a\cdot f\left(g\left(m\right)\right)=f\left(a\cdot g\left(m\right)\right)=a^2m$$

כלומר $g\left(g\left(m\right)\right)=m$.

כלומר גם g מקיימת את (2) ואת (7) רק עם $a=1$ וכל הערכים שלה יותר קטנים. מכיוון שמטרתנו זה לה לקבל $f\left(1998\right)$ מספיק לעבוד עם פונקציה g.

מי המשתתף ב-IMO בשנת 1998, אמור היה לדעת לפרק אותו לגורמים ראשוניים.

$$1998=2\cdot999=2\cdot3^3\cdot37$$

אם ניקח $f\left(5\right)=37$, $f\left(37\right)=5$, $f\left(3\right)=2$, $f\left(2\right)=3$, $f\left(1\right)=1$, ולכל ראשוני $p\ne2,3,5,37$ ניקח $f\left(p\right)=p$, ובכל מספר לא ראשוני נגדיר את הפונקציה בעזרת הנוסחה $f\left(mn\right)=f\left(m\right)\cdot f\left(n\right)$, נקבל

$$f\left(1998\right)=f\left(2\right)\cdot f\left(3\right)^3\cdot f\left(37\right)=3\cdot2^3\cdot5=120$$

בכל מקרה אחר, נקבל $f\left(1998\right)=f\left(1\right)^4\cdot g\left(2\right)\cdot g\left(3\right)^3\cdot g\left(37\right)$. נשים לב כי $g\left(p\right)$ לכל p ראשוני הוא ראשוני, כי אחרת, אם $g\left(p\right)=m\cdot n$, כאשר $m,n>1$, אז $p=g\left(g\left(p\right)\right)=g\left(m\right)\cdot g\left(n\right)$ והרי g חח"ע, לכן p פריק. לכן $g\left(3\right)^2\ge2^2$ וגם $g\left(2\right)\cdot g\left(3\right)\cdot g\left(37\right)\ge2\cdot3\cdot5$ לכן הדוגמה שמצאנו היא מינימלית.

3. $n \mid f(a)-f(b) \iff f(n) \mid a-b$.

פתרון. נתבונן במספרים $f(1), f(2),..., f(n+1)$. לפי שובך יונים יש שניים שהפרש שלהם מתחלק ב-n, כלומר $1 \le k < \ell \le n+1$ כך ש-$n \mid f(\ell)-f(k)$ ואז גם $f(n) \mid \ell - k$. אבל $0 < \ell - k \le n$, ולכן $f(n) \le \ell - k \le n$.

בפרט מתקבל מזה ש-$f(1)=1$.

נתבונן בירך n הקטן ביותר, עבורו $f(n) \ne n$. כלומר לכל $1 \le k < n$ מתקיים $f(k)=k$. ולכן ערך $k < n$ עבורו $f(k)=f(n)$, כלומר $f(n)-f(k)$ מחלק בכל מספר, לכן $n-k$ מתחלק ב-$f(n-1)=n-1$. לכן $n-k=n-1$, כלומר $k=1$, כלומר $f(n)=1$. אבל $f(n) \mid 2-1$ לכן $n \mid f(2)-f(1)$.

אם $n>2$ נקבל סתירה. לכן $f(n)=n$, וברור שזו פונקציה מתאימה.

אם $n=2$, נקבל $f(2)=1$ ואז $n \mid f(2)-f(1)$ לכל n ולכן $f(n) \mid 2-1$ ומקבלים פונקציה $f(n)=1$ לכל n. קל לראות שגם פונקציה זאת מתאימה.

תשובה. $f(n) \equiv n$ או $f(n) \equiv 1$.

4. $f:\mathbb{R} \to \mathbb{Z}$,
$\left(f\left(f(y)-x\right)\right)^2+\left(f(x)\right)^2+\left(f(y)\right)^2=\left(1+2f\left(f(y)\right)\right)\cdot f(y)$.

פתרון. נסמן $f(0)=a$. נציב $x=y=0$ ונקבל

$$\left(f(a)\right)^2+2\cdot a^2=\left(1+2f(a)\right)\cdot a$$

במילים אחרות $\left(f(a)-a\right)^2=a-a^2$. מכיוון ש-$a$ שלם, מקבלים כי a הוא 0 או 1, אחרת ריבוע של מספר ממשי יהיה שלילי.

אם $a=0$ נציב $y=0$ ונקבל: $\left(f(-x)\right)^2+\left(f(x)\right)^2=0$, במילים אחרות $f(x)=0$ לכל x. קל לראות שפונקציה זו מתאימה.

אם $a=1$ נציב $y=0$ ונקבל $\left(f(1-x)\right)^2+\left(f(x)\right)^2+1=1+2f(1)$

$$\left(f(1-x)\right)^2+\left(f(x)\right)^2=2f(1)$$

נציב גם $x=0$ במשוואה אחרונה ונקבל $\left(f\left(1\right)\right)^2+1=2f\left(1\right)$ כלומר
$\left(f\left(1\right)-1\right)^2=0$, כלומר $f\left(1\right)=1$. לכן $\left(f\left(1-x\right)\right)^2+\left(f\left(x\right)\right)^2=2$.

אם 2 הוא סכום ריבועים של שני מספרים שלמים, אז זה $1+1$, לכן $f\left(x\right)=\pm1$ לכל x.

במשוואה המקורית

$$\left(f\left(f\left(y\right)-x\right)\right)^2+\left(f\left(x\right)\right)^2+\left(f\left(y\right)\right)^2=\left(1+2f\left(f\left(y\right)\right)\right)\cdot f\left(y\right)$$

נקבל

$$3=\pm\left(1+2f\left(f\left(y\right)\right)\right)$$

לכן $f\left(f\left(y\right)\right)=1$ והסימן הוא + לכן $f\left(y\right)=1$ לכל y.

תשובה. $f\left(x\right)\equiv0$ או $f\left(x\right)\equiv1$.

.5 $f\left(2f\left(f\left(n\right)\right)+m\right)=f\left(m\right)+2n$.

פתרון. קל לראות שפונקציה חח"ע, כי אם $f\left(n_1\right)=f\left(n_2\right)$ אז כאשר נציב את n_1 ואת n_2 במקום n, באגף שמאל נקבל את אותו ערך, לכן גם באגף ימין נקבל אותו ערך, כלומר נקבל ש-$2n_1=2n_2$.

נסמן את $f\left(f\left(1\right)\right)=a$. אז $f\left(2a+m\right)=f\left(m\right)+2$.

לכן אם ניקח סדרה חשבונית עם הפרש $2a$, הערכים של f על הסדרה הזאת יתנו או את כל המספרים הזוגיים מספיק גדולים, או את כל המספרים האי-זוגיים מספיק גדולים.

אבל יש $2a$ סדרות חשבוניות זרות עם הפרש $2a$, ופונקציה חח"ע, לכן $2a\le2$. לכן $1=a=f\left(f\left(1\right)\right)$.

בנוסף קיבלנו ש- $f\left(m+2\right)=f\left(m\right)+2$.

מכאן באינדוקציה $f\left(m+2k\right)=f\left(m\right)+2k$.

מהמשוואה המקורית $f\left(m\right)+2f\left(f\left(n\right)\right)=f\left(m+2f\left(f\left(n\right)\right)\right)=f\left(m\right)+2n$,

כלומר $f\left(f\left(n\right)\right)=n$, לכן הפונקציה היא על.

נניח כי $f\left(k\right)\le2$ אבל $k>2$. אז $f\left(k\right)=f\left(k-2\right)+2\ge2$ ואז $f\left(k-2\right)\ge0$.

זה לא יתכן, לכן אם $f\left(k\right)\le2$ אז גם $k\le2$.

כלומר יש לנו פונקציה חח"ע ועל מ- $\mathbb{N}$ לעצמו שמעבירה את 1 ו-2 ל-1 ו-2, ובנוסף $f\left(m+2\right)=f\left(m\right)+2$.

אם $f\left(1\right)=1$, $f\left(2\right)=2$ נקבל $f\left(n\right)\equiv n$.

אם $f\left(1\right)=2$, $f\left(2\right)=1$ נקבל $f\left(n\right)=n-\left(-1\right)^n$.

קל לבדוק ששתי התשובות מתאימות.

6. $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f(k)\cdot f(k+1)}=\frac{f(f(n))}{f(n+1)}$.

פתרון. נציב $n=1$ ונקבל $\frac{1}{f(1)\cdot f(2)}=\frac{f(f(1))}{f(2)}$, כלומר $f(1)\cdot f(f(1))=1$, לכן $f(1)=1$.

נציב $n=2$ ונקבל $\frac{1}{f(2)}+\frac{1}{f(2)\cdot f(3)}=\frac{f(f(2))}{f(3)}$.

נרצה להראות באינדוקציה כי $f(f(n))<f(n+1)$.

בסיס האינדוקציה צריך להראות ש-$f(f(1))=1<f(2)$. אחרת $f(2)=1$ ואז $f(f(2))=1$ ואז $\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot f(3)}=\frac{1}{f(3)}$ כלומר $1=0$.

בשביל צעד האינדוקציה נציג את הנוסחה בצורה יותר קצרה. לסכום של כל המחוברים פרט לאחרון בצד שמאל כבר יש ביטוי קצר מהנוסחה שבה n קטן ב-1. לכן

$$\frac{f(f(n-1))}{f(n)}+\frac{1}{f(n)\cdot f(n+1)}=\frac{f(f(n))}{f(n+1)}$$

לכל $n>1$.

$$\frac{f(f(n))}{f(n+1)}=\frac{f(f(n-1))}{f(n)}+\frac{1}{f(n)\cdot f(n+1)}\le\left(1-\frac{1}{f(n)}\right)+\frac{1}{f(n)}=1$$

לכן $\frac{f(f(n))}{f(n+1)}\le 1$. על מנת שיתקיים שוויון, צריך שיתקיים $f(n+1)=1$ וגם $f(f(n-1))=f(n)-1$. נציב את זה במשוואה בצורה מקוצרת שרשמנו, כאשר נציב $n+1$ במקום n

$$\frac{f(f(n))}{f(n+1)}+\frac{1}{f(n+1)\cdot f(n+2)}=\frac{f(f(n+1))}{f(n+2)}$$

$$1<1+\frac{1}{f(n+1)\cdot f(n+2)}=\frac{1}{f(n+2)}\le 1$$

וזו סתירה.

בזה הוכחנו את הטענה האינדוקטיבית $f\left(f\left(n\right)\right)<f\left(n+1\right)$.

נוכיח שתנא זה מתקיים רק על ידי פונקצית הזהות.

טענה. $f\left(n\right)\geq k$ לכל $n\geq k$.

נוכיח את הטענה באינדוקציה על k. בסיס האינדוקציה $f\left(n\right)\geq 1$ הוא ברור.

צעד האינדוקציה: יהא $n\geq k+1$. אזי $n-1\geq k$. לכן $f\left(n-1\right)\geq k$. לכן

$$f\left(n\right)>f\left(f\left(n-1\right)\right)\geq k.$$

בזה הוכחנו את הטענה.

מהטענה נובע כי $f\left(n\right)\geq n$ לכל n. לכן $f\left(n+1\right)>f\left(f\left(n\right)\right)\geq f\left(n\right)$ לכן פונקציה עולה. ולכן $n+1>f\left(n\right)\geq n$. ולכן $f\left(n\right)=n$.