תרגיל 3

$\mathbb{N}$ היא קבוצה של מספרים שלמים גדולים מ-0. כל פונקציה היא $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ אלה אם כן נאמר אחרת. בכל דוגמה, אם לא נאמר אחרת, צריך למצוא את כל הפונקציות שמקיימות את כל התנאים.

1. עבור פונקציה f, נגדיר $f^{[k]}(n)=f\left(f\left(...f\left(n\right)...\right)\right)$, כאשר משתמשים בפונקציה f בדיוק k פעמים. מצאו $k>1$ קטן ביותר, עבורו קיימת פונקציה שמקיימת $f^{[k]}(n)=n+5777$ לכל $n\in\mathbb{N}$.

2. $f\left(n^2 f\left(m\right)\right)=m\cdot f\left(n\right)^2$. מצאו את המינימום של $f\left(1998\right)$.

3. $n\mid f\left(a\right)-f\left(b\right) \Leftrightarrow f\left(n\right)\mid a-b$.

4. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{Z}$,
$\left(f\left(f\left(y\right)-x\right)\right)^2+\left(f\left(x\right)\right)^2+\left(f\left(y\right)\right)^2=\left(1+2f\left(f\left(y\right)\right)\right)\cdot f\left(y\right)$.

5. $f\left(2f\left(f\left(n\right)\right)+m\right)=f\left(m\right)+2n$.

6. $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f\left(k\right)\cdot f\left(k+1\right)}=\frac{f\left(f\left(n\right)\right)}{f\left(n+1\right)}$.