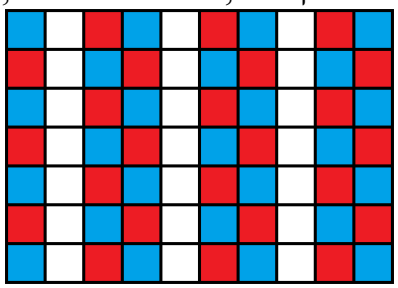
תרגיל 2

1. האם אפשר לחלק מלבן 53×109 למלבנים, שחלק מהם מלבנים אנכיים 1×2 והאחרים הם מלבנים אופקיים 1×3 ?

פתרון. אם הייתה חלוקה כזאת, אז כל המלבנים היו משובצים על משבצות שלמות. אכן, מכל מלבן של ריצוף ניתן ללכת בכל כיוון וכל פעם לעבור למלבן אחר, עד שנצא מהלוח; המלבנים נצמדים זה לזה לפי צלעות, ולכן כל מלבן נצמד למלבן וצלעותיהם מקבילים. לכן מרחק מכל צד של כל מלבן לצד של המלבן הגדול הוא שלם.



נצבע חלק ממשבצות הלוח בשני צבעים: אדום וכחול. בעמודות 1, 4, 7, 10, . . . , 109 נצבע באופן מתחלף כחול-אדום-כחול-אדום-כחול, ובעמודות 2, 5, 8, 11, . . . ,107 נצבע את המשבצות גם באופן מתחלף אדום-כחול-אדום-כחול-אדום. את העמודות האחרות ניתן להשאיר ריקות.

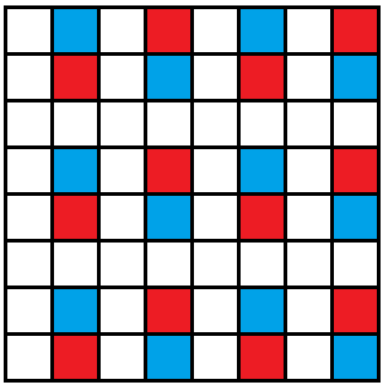
קל לראות שכמות המשבצת הכחולות גדול ב-1 מכמות המשבצות האדומות. מצד שני כל מלבן אנכי 1×2 וכל מלבן אופקי 1×3 מכסים אותה כמות של שטח כחול ושטח אדום. לכן אי-אפשר לכסות את כל החלק הכחול ולא את כל החלק האדום.

הערה. קיימת טענה יותר כללית. נגיד שמלבן הוא שמח, אם יש לו צלע באורך שלם. אזי לא לחלק מלבן לא שמח למספר סופי של מלבנים שמחים. במקרה שלנו, אם נכווץ את התמונה פי 2 בגובה ופי 3 ברוחב, נקבל מקרה פרטי של טענה זו.

2. על כל משבצת של לוח משבצות רשום מספר שלם. בכל מהלך מותר לבחור ריבוע 3×3 או 4×4 ולהגדיל את כל המספרים בו ב-1. המטרה היא להגיע למצב שכל המספרים יתחלקו ב-10. האם תמיד ניתן להשיג את המטרה

א. עבור לוח 8×8 ?

ב. עבור לוח 10×10 ?



פתרון. נצבע חלק מהמשבצות כמו בציור.

בעמודות 3, 7 נצבע כחול, אדום, לבן, כחול . . .
בעמודות 1, 5 (ו-9 אם יש) נצבע אדום, כחול, לבן, אדום, . . . עמודות זוגיות נשאיר לבנות.

כל ריבוע 4×4 בכל שורה שלאל לגמרי לבנה תהיה משבצת אחת אדומה ואחת כחולה. בכל ריבוע 3×3 בכל עמודה שהיא לא לבנה נקבל משבצת אחת כחולה ומשבצת אחת אדומה. לכן בכל פעולה נגדיל באותו מספר את סכום המשבצות האדומות והכחולות. לכן הפרש בין סכום המספרים במשבצות אדומות לסכום המספרים במשבצות כחולות נשמר עם הזמן. אם הפרש זה לא מתחלק ב-10 במצב

התחלתי (שזה יתכן), אז הוא אף פעם לא יתחלק ב-10. במקרה זה תמיד תהיה משבצת בה המספר לא מתחלק ב-10.

הערה. יש פתרון נוסף, שפוטר רק את סעיף א. כאשר אנחנו מסתכלים על כל המשבצות מודולו 10, מקבלים 10^{64} אפשרויות. ננסה להעריך, לכמה מצבים ניתן להגיע מכל מצב נתון. קיימים $6^2=36$ ריבועים 3×3, וגם $5^2=25$ ריבועים 4×4. באמצעות כל ריבוע ניתן לבצע מספר מהלכים, אבל אין טעם לעשות 10 מהלכים או יותר עם אותו ריבוע, כי זה מחזיר למצב שהיה אפשר להגיע אליו גם בפחות מהלכים. כמובן, לא משנה גם באיזה סדר עושים את הפעולות. לכן יש לנו לכל היותר $25+36=61$ פעולות, שכל אחד מהן ניתן לעשות בין 0 ל-9 פעמים, כלומר ניתן להגיע לכל היותר ל-10^{61} מצבים (שגם כאן אולי יש מצבים שנספרים יותר מפעם אחד).

אפשר בגישה זאת לבנות גם פתרון לסעיף ב', אבל שם צריך להשתמש בתלות בין הפעולות וזה טיפה חופר.

3. א. כמה תיבות $4\times1\times1$ ניתן להכניס לקופסה $6\times6\times6$ כך שהפאות של הקופסה יהיו מקבילים לפאות של התיבות, אבל התיבות יכולות להיות מכוונות בכל אחד מ-3 הכיוונים האפשריים (לאורך, לרוחב ולעומק) ?
ב. נסחו ופתרו שאלה דומה למרחב 4-מימדי ($4\times1\times1\times1$ בתוך $6\times6\times6\times6$) ולמימדים גבוהים יותר.

פתרון. נצבע את הקוביה לפי צביעת שח, רק שגודל של משבצת שח היא פי 2 גדולה מגודל הריבוע. במילים אחרות, עם נאפיין כל משבצת קובייתית על ידי קואורדינאטות בין 1 ל-6, נוכל לבדוק על כמה קואורדינאטות הן 3 או 4, ואם יש מספר זוגי של כאלה, נצבע בשחור, אבל אם יש מספר אי-זוגי של כאלה, נצבע בלבן. קל לראות שלכל תיבה באורך 4 הנפח השחור שמוכל בה שווה לנפח הלבן שמוכל בה.
אם נוריד 4 שכבות ראשונות בכל כיוון (שאפשרי לרצף אותן בתיבות מהסוג שמותר) תישאר קובייה $\ldots\times2\times2$ והיא כולה שחורה. הנפח שלה הוא 2^d כאשר d זה המימד, ולכן כמות התיבות שניתן להכניס הוא $\frac{6^d-2^d}{4}$ כש-d הוא המימד, ואי-אפשר להכניס יותר תיבות, כי נגמר הנפח הלבן.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

4. א. על משבצות של לוח 10×10 נמצאים אבנים, בהתאם לכמויות שרשומות בטבלה. בכל מהלך מותר בכל תור לבחור 3 משבצות ברצף באותה שורה או באותה עמודה, ולהוציא אבן אחת מכל אחת מבין 3 המשבצות (כמובן, על

מנת לעשות מהלך כזה חייבים שיהיו אבנים בכל 3 המשבצות). מהי הכמות המינימלית של האבנים שיכולו להישאר בסוף המשחק?

ב. שאלה דומה עבור טבלה 5×5 שכמויות האבנים במשבצות מ-1 עד 25 לפי עקרון דומה.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

פתרון. א. נחלק את כל המספרים חוץ משורה עליונה ועמודה ימנית לריבועים 3×3. בכל ריבוע כזה נעשה 10 מהלכים בשורה אמצעית, ו-20 מהלכים בשורה האחרונה. נגיע למצב שבכל ריבוע 3×3 כזה, בכל עמודה מופיע אותו מספר 3 פעמים. כעת נעשה פעולות על עמודות של כל ריבוע, עד שלא יישאר בו כלום.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

נשאר שביל של משבצות שעדיין לא התאפסו. נחלק אותם לשלשות (חוץ ממשבצת של אבן אחת) 2 עד 4, 5 עד 7, 8 עד 10, וגם בעמודה ימנית 20 עד 40, 50 עד 70, 80 עד 100.

בכל אחת מהשלשות האלה נבצע כמה מהלכים שאפשר. המספרים שיישארו בשורה ראשונה הם 1 2 0 1 2 0 1 2 0 1, ובעמודה ימנית יישארו בנוסף (מהשורה שנייה למטה) מספרים 0 10 0 20 10 0 20 10 0 20. סכום המספרים שיישארו הוא $100=90+9+1$ וזה מספר הכי קן שאפשר להגיע אליו. אכן, בצביעה שהצגנו בציור (שתלויה בשארית החלוקה ב-3 של המספר המקורי) לא יישאר אף אבן באף משבצת לבנה. אבל אנחנו בכל מהלך משתמשים במשבצת אחת מכל צבע. לכן אם הצלחנו להוריד את אחד הצבעים, לגמרי, בעצם עשינו את כמות המרבית של מהלכים שניתן לעשות.

ב. גם הפעם נצבע משבצות באופן דומה (בעצם, יש שתי צביעות כאלו, אבל רק אחת תיתן חסם מדויק). סכום המספרים במשבצות כחולות $98=23+19+15+16+12+8+4+1$, וכל מהלך מוריד 1 מכל צבע, לכן מתאפשר לעשות לכל היותר 98 מהלכים.

נתחיל עם 8 ממהלכים על משבצות נמוכות של עמודה שמאלית, ועוד 9 מהלכים על משבצות נמוכות של עמודה שנייה משמאל, ועוד 10 מהלכים על משבצות ימניות של שורה תחתונה, ו-5 מהלכים על משבצות ימניות של שורה שנייה מלמטה.

לאחר מכן נעשה 8 מהלכים על משבצות שמאליות של שורה תחתונה, 5 מהלכים על משבצות נמוכות של עמודה אמצעית, ועוד מהלך אחד במשבצות שמאליות של השורה הראשונה.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
3	3	13	14	15
8	8	13	14	15
13	13	13	14	15

כעת נעשה 13 מהלכים במשבצות נמוכות של עמודה ימנית, 12 מהלכים במשבצות נמוכות של עמודה השנייה מימין, 3 מהלכים במשבצות נמוכות של עמודה שמאלית ו-3 מהלכים במשבצות נמוכות של העמודה השנייה משמאל.

0	1	2	4	5
6	7	8	9	10
3	3	8	14	15
8	8	8	14	15
5	5	0	14	15

כעת נעשה 2 מהלכים בצד ימין של שורה ראשונה, שני מהלכים בצד ימין של שורה שנייה, 6 מהלכים בצד שמאל של שורה שנייה, וש-5 מהלכים בצד שמאל של שורה רביעית.

0	1	2	4	5
6	7	8	9	10
0	0	8	2	2
5	5	8	2	2
3	3	0	2	2

לבסוף נעשה 2 מהלכים במשבצות העליונות של עמודה שמאלית, במשבצות עליונות של עמודה שנייה מימין, ומשבצות ימניות של שורה לפני אחרונה.

0	1	0	2	3
0	1	0	7	8
0	0	8	2	2
0	0	3	2	2
3	3	0	2	2

לא נישאר כלום במשבצות כחולות, לכן לא היה אפשרות לעשות יותר מהלכים. לכן הסכום שנשאר הוא מינימלי, והוא

$$1+1+1+5+6+8+1+3+3+2+2=8+6+9+10=33$$

0	1	0	0	1
0	1	0	5	6
0	0	8	0	0
0	0	1	0	0
3	3	0	2	2

5. נתון מלבן 90×50. כמה מלבנים $1\times 10\sqrt{2}$ עם צלעות שמקבילות לצלעותיו ניתן לצייר בתוכו ללא חפיפות?

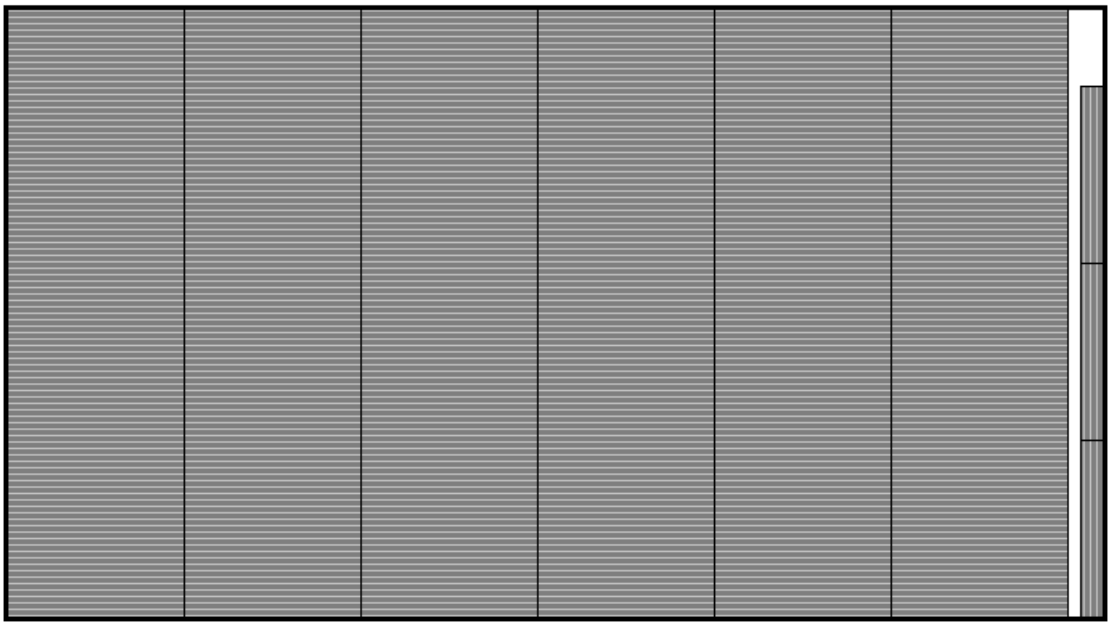
פתרון. נתחיל לסדר מלבנים לאורך. כלומר, ניצור מלבן $50\times 10\sqrt{2}$ מ-50 מלבנים קטנים. כל מלבן כזה ניתן לשים בקצה של מלבן $50\times y$ ויישאר מלבן ריק $50\times\left(y-10\sqrt{2}\right)$.

נשים לב כי $6\cdot\sqrt{2}<9$ אבל $7\sqrt{2}>9$. לכן אחרי שנשתמש ב-300 מלבנים קטנים, יישאר לנו מלבן $50\times\left(90-60\cdot\sqrt{2}\right)$.

נשים לב כי $5\cdot\sqrt{2}>90-60$. אכן, זה כמו להגיד ש-$85>60\sqrt{2}$ כלומר $17>12\sqrt{2}$ כלומר $289>288$.

קל לראות גם ש-$50>3\cdot 10\sqrt{2}$ ולכן בסמוך לאחד הפינות במלבן שנישאר ניתן להכניס מלבן $5\times 30\sqrt{2}$ שמורכב מ-15 מלבנים קטנים.

בסה"כ הצלחנו להכניס 315 מלבנים קטנים לקופסה. נוכיח, שאי-אפשר לשפר.



החסם הנאיבי של שטח נותן רק שאפשר להכניס לא יותר מאשר 318 מלבנים. על מנת לשפר, נשתמש ברעיון של צבעיה. הצביעה היא צביעת שח, כאשר אורך הצלע של משבצת היא $5\sqrt{2}$, ופינה של המשבצת השחורה הראשונה סמוכה לפינה ריקה בדוגמה שלנו.

כל מלבן עם צלע $10\sqrt{2}$ וצלעות מקבילות לצלעות של מלבן הגדול יכסה שטח לבן ושטח שחור באופן שווה. גם בדוגמה שהצנו, כל המלבנים שהכנסנו מכסים שטח שווה בשחור ובלבן, וגם השביל בין המלבנים שכיסינו באורך $30\sqrt{2}$ ורוחב $85-6\sqrt{2}$ מכיל אותה כמות של שטח שחור ולבן. בפינה יש לנו מלבן לא מכוסה שצלעותיו $50-30\sqrt{2}$, $90-60\sqrt{2}$ והיינו רוצים להגיד שכולו שחור. בשביל זה מספיק להוכיח כי

$$50-30\sqrt{2}<5\sqrt{2} \quad \text{וגם} \quad 90-60\sqrt{2}<5\sqrt{2}$$

$$10<7\sqrt{2} \quad \text{וגם} \quad 18<13\sqrt{2}$$

אי-השוויון הראשון שגוי (אבל לא בהרבה) והשני נכון: $162=2\cdot 9^2<13^2=169$. לכן חלק מהפינה הריקה שהוא מלבן $\left(50-35\sqrt{2}\right)\times\left(90-60\sqrt{2}\right)$ יהיה לבן. בנוסף, גם חצי מהשביל הצר $30\sqrt{2}\times\left(85-60\sqrt{2}\right)$ לבן.

לו מישהו היה מצליח להכניס מלבן אחד יותר, המלבן הזה היה מכסה $5\sqrt{2}$ מהשטח השחור ו- $5\sqrt{2}$ מהשטח הלבן בצביעת שח. גם אם השאר לנו מספיק שטח שחור אחרי שסידרנו 315 מלבנים $1\times 10\sqrt{2}$, אנו נרצה לטעון שלא נשאר מספיק שטח לבן לעוד

אחד. גם אם היינו מסדרים את 315 המלבנים בצורה אחרת, זה לא היה משנה כי כל אחד מהם בכל מקרה ייקח אותה כמות של שטח לבן.

נעשה את החשבון. השטח הלבן שצריך למלבן נוסף הוא $5\sqrt{2}$, והשטח הלבן שנשאר הוא $\frac{1}{2}\cdot\left(85-60\sqrt{2}\right)\cdot 30\sqrt{2}+\left(90-60\sqrt{2}\right)\cdot\left(50-35\sqrt{2}\right)$. נשאר להראות כי

$$\frac{1}{2}\cdot\left(85-60\sqrt{2}\right)\cdot 30\sqrt{2}+\left(90-60\sqrt{2}\right)\cdot\left(50-35\sqrt{2}\right)<5\sqrt{2}$$
$$\left(85-60\sqrt{2}\right)\cdot 3\sqrt{2}+\left(90-60\sqrt{2}\right)\cdot\left(10-7\sqrt{2}\right)<\sqrt{2}$$
$$\left(85-60\sqrt{2}\right)\cdot 3+\left(45\cdot\sqrt{2}-60\right)\cdot\left(10-7\sqrt{2}\right)<1$$
$$255-180\cdot\sqrt{2}+450\cdot\sqrt{2}+420\cdot\sqrt{2}-600-630<1$$
$$870\cdot\sqrt{2}-180\cdot\sqrt{2}<1030-55+1$$
$$690\cdot\sqrt{2}<976$$
$$345\cdot\sqrt{2}<488$$
$$345<244\cdot\sqrt{2}$$
$$1+\frac{101}{244}<\sqrt{2}$$
$$1+2\cdot\frac{101}{244}+\left(\frac{101}{244}\right)^2<2$$
$$\frac{101}{122}+\left(\frac{101}{244}\right)^2<1$$
$$\frac{101}{122}+\left(\frac{101}{244}\right)^2<1$$
$$\left(\frac{101}{244}\right)^2<\frac{21}{122}$$
$$101^2<4\cdot 21\cdot 122$$
$$101^2<84\cdot 122$$
$$84\cdot 101+17\cdot 101<84\cdot 101+84\cdot 21$$
$$17\cdot 101<84\cdot 21$$
$$17\cdot 84+17\cdot 17<84\cdot 17+84\cdot 4$$
$$17\cdot 17<84\cdot 4$$
$$289<320+16$$

וזה ברור לקיפוד.

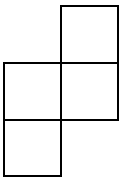
6. כמה צורות מהסוג שמוצג בציור (מותר לסובב ולשקף) ניתן להכניס מלבן שגודלו:

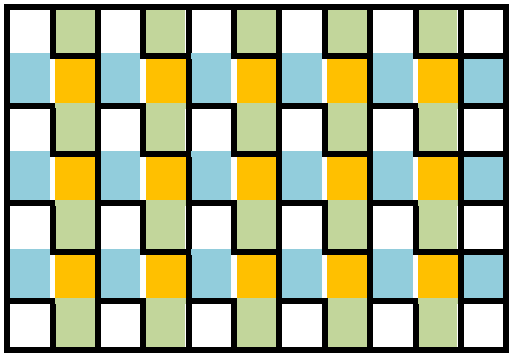
א. $n\times(2m+1)$,

ב. 8×8,

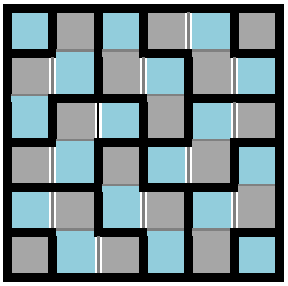
ג. 6×6,

ד. 10×10.

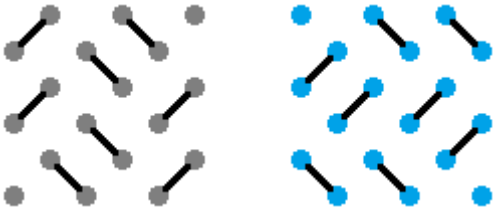




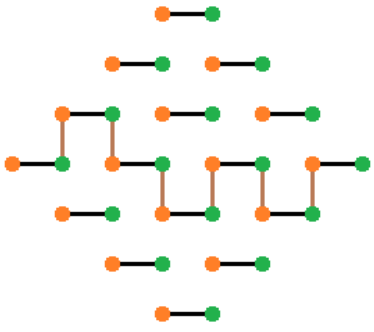
פתרון. א. נצבע את המשבצות ב-4 צבעים, כאשר כל צבע נקבע בהתאם לזוגיות של מספר שורה וזוגיות של מספר עמודה. קל לראות שכל צורה מכסה משבצת אחת מכל צבע. הצבע הנדיר ביותר מתאים לשורות זוגיות ועמודות זוגיות: יש $m\cdot\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$ משבצות בצבע כזה (כתום בציור). זוהי הכמות המרבית של הצורות. לא קשה להמציא שיט להכניס כמות כזאת של צורות, למשל כמו בציור.



ב. קודם נוכיח, שלא ניתן לרצף את כל הלוח עם הצורות. ניתן לעשות זאת כאשר מסתכלים על הפינה שחייבת להיות מכוסה ואז מתקדמים מהפינה לאורך הצלע, אך אנחנו ננקוט בגישה אחרת שתהיה שימושית בהמשך. נתבונן בצביעת שח. כל צורה תופסת שתי משבצות מכל צבע, שהן סמוכות באלכסון.



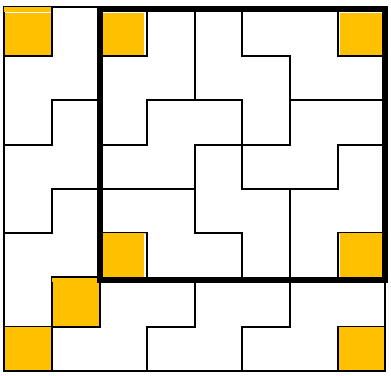
נצייר בנפרד את המרכזים של משבצות בכל אחד מהצבעים. את המרכזים של משבצות באותו צבע שנמצאים באותה צורה נחבר באמצעות קווים ישרים. נקבל זיווג, כאשר כל צורה יוצרת קו אלכסוני בכיוון שלה בכל אחד משני התמונות. בתמונה שמאלית יש רק דרך אחת לזווג את כל הנקודות, באמצעות אלכסונים בכיוון אחד. בתמונה ימנית גם יש רק דרך אחת לזווג את כל הנקודות, וזה באמצעות אלכסונים בכיוון אחר. אבל כל צורה נותנת שני אלכסונים באותו כיוון, ולכן לא ניתן ליצור את שני הזיווגים האלה בו-זמנית.

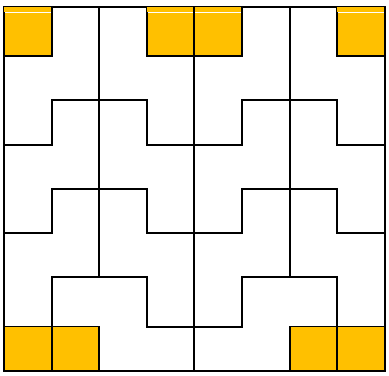


ג. נשתמש באותו רעיון, אבל הפעם נסובב את התמונה ב-45°. אנו נוכיח, שבכל כיסוי תשארנה לפחות 8 משבצות לא מכוסות. לו היה כיסוי שמדלג רק על 4 משבצות, אז על מרכזה המשבצות השחורות בצביעת שח היינו מקבלים זיווג של נקודות שמוכות שמדלג על שתי נקודות בלבד. נשווה אותו לזיווג שמזווג את כל המשבצות (שהוא יחיד). יש הבדלים בין שני הזיווגים.

כלומר יש משבצות, שבהן נראה מנקודה אחת יוצאים שני קווים, אבל יש גם נקודות שבהן יש אותו קו פעמיים. נקודות שבהן יש שני קווים יוצרים שרשרת. אכן, אם יש לנו זוג לפי זיווג אחד שקצה אחד שלו מזווג בצורה שונה על ידי זיווג אחר, אז גם קצה אחר שלו מזווג בצורה שונה על ידי זיווג אחר (או לא מזווג).

נצבע את מרכזי המשבצות השחורות בצביעת מתחלפת, כמו צביעת שח (ירוק וכתום בציור). אם ניקח שרשרת, שבה בכל מהלך של זיווג מלא עוברים מכתום לירוק, ובכל מהלך של זיווג שלנו עוברים מירוק לכתום, נוכל לשים לב שבכל שני מהלכים השרשרת מתקדמת משמאל לימין, לכן היא גם לא חוזר לנקודה שהיא הייתה בה. השרשרת לא יכולה להסתיים או להתחיל במהלך של זיווג שלנו, כי בזיווג המלא לכל נקודה יש זוג. לכן שני הקצוות של השרשרת הם בזיווג המלא ולא בזיווג שלנו. לכן, אם הזיווג שלנו מדלג רק על שתי משבצות, יש רק שרשרת אחת.

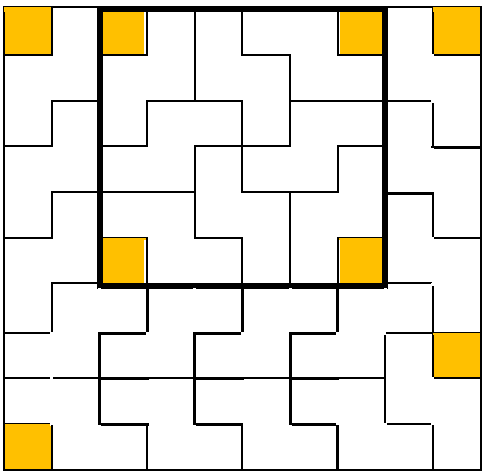




בשרשרת שלנו רוב המהלכים אופקיים, ויש לכל היותר 13 מהלכים (כי אחרת אפשר להתקדם מימין לשמאל למרחק 7 לכל היותר), ורק 6 מהלכים יכולים להיות אנכיים. לכן בזיווג שלנו יש לא יותר מאשר 6 קווים אנכיים, ולפחות 9 קווים אופקיים.

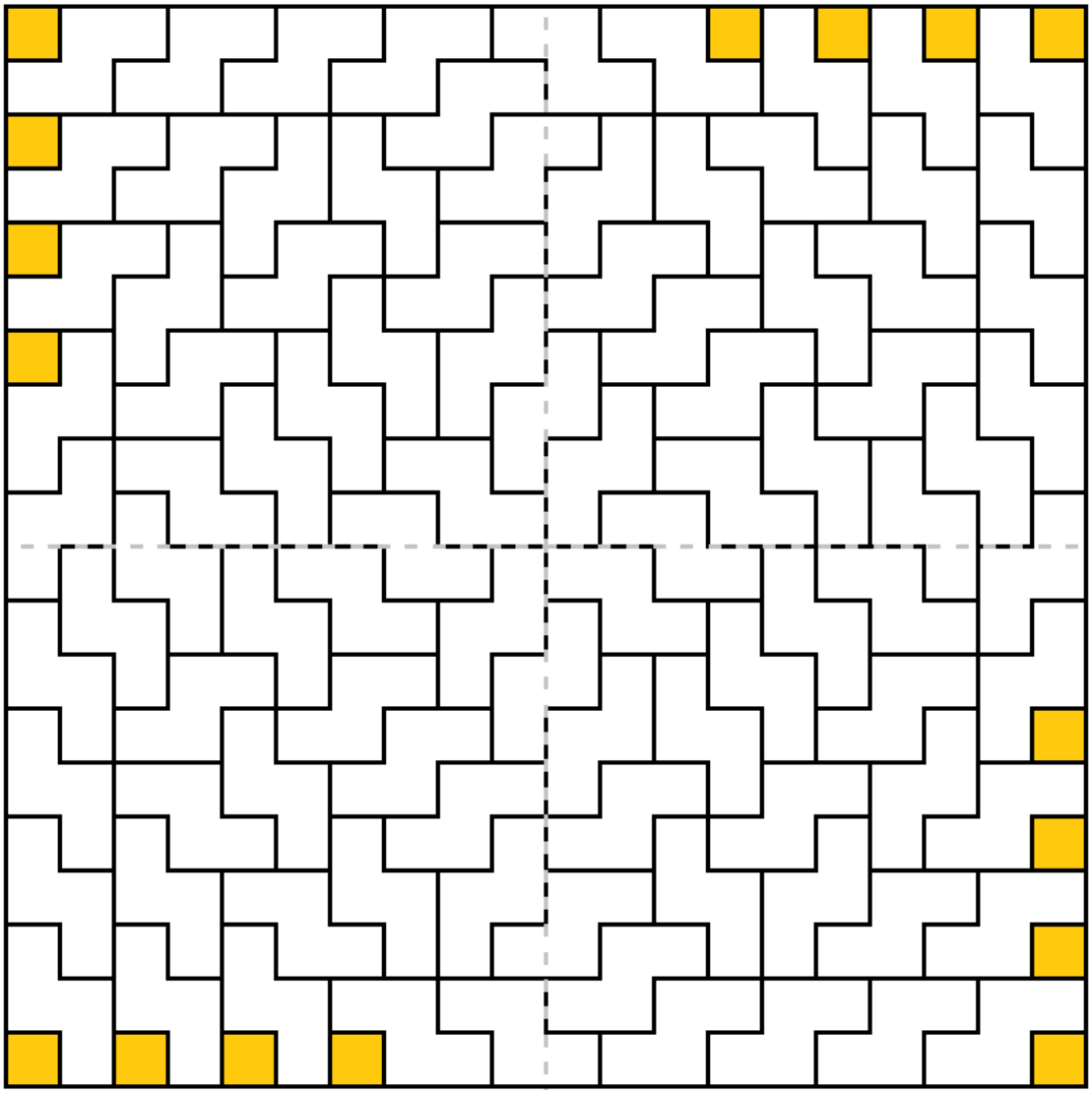
לכן יש יותר צורות אופקיות מאשר אנכיות, אבל באותה צורה יינו יכולים להראות שיש יותר צורות אנכיות מאשר אופקיות.

הקיימות גם דוגמאות לכך שאפשר לרצף לוח חוץ מ-8 משבצות על ידי הצורות (שתי דוגמאות מופיעות בציור).



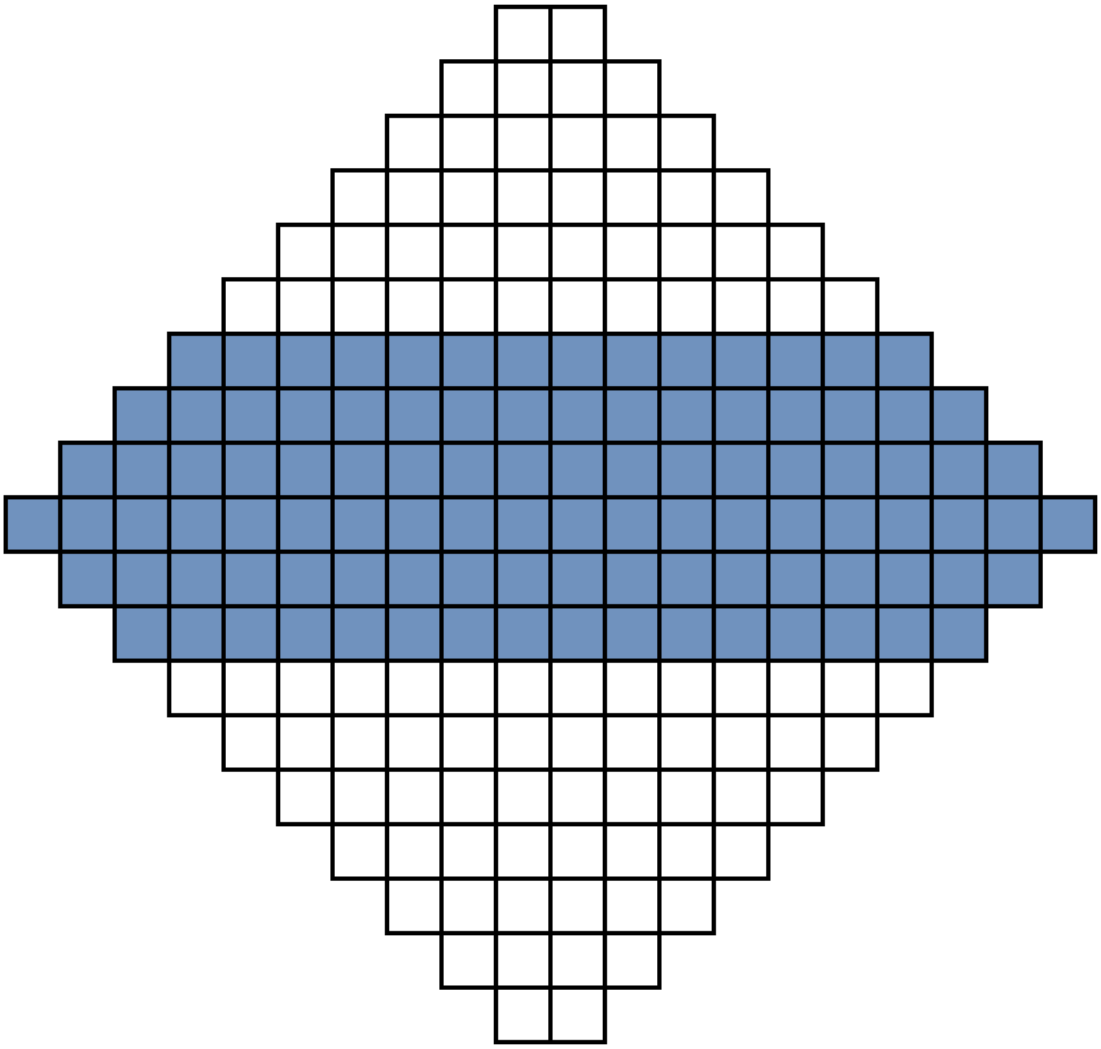
ד. בציור רואים כיצד לרצף כאשר מדלגים על 8 משבצות. הוכחה לכך שלא ניתן לדלג על 4 משבצות בלבד זהה להוכחה בסעיף הקודם (רק אם מספרים אחרים).

ה. אפשר לרצף את כל הלוח פרט ל-16 משבצות:



אנו נוכיח שאי-אפשר לדלג רק על 12 משבצות. בדומה לגישה של הסעיפים הקודמים, נחשוב על הלוח של משבצות שחורות בלבד, בדומה לתמונה שציירנו בסעיף ג', רק שהפעם אנחנו נצייר משבצות ריבועיות ולא נקודות. כל כיסוי חלקי של לוח מקורי באמצעות צורות ייתן לנו כיסוי חלקי של לוח חדש באמצעות אבני דומינו. אם דילגנו על 12 משבצות בלבד, אז בלוח של משבצות שחורות אנחנו צריכים לכסות את כל המשבצות חוץ מ-6. ניצור שרשראות כמו שעשינו בסעיף ג'. הפעם מותר לנו ליצור לא יותר מאשר 3 שרשראות. נזכיר, שהשרשראות מתקדמות מימין לשמאל. נניח שיש 3 שרשראות שכמויות המהלכים האנכיים בהן a, b ו-c. אז כמויות המהלכים הכוללת בהן היא לפחות $2a+1$, $2b+1$ ו-$2c+1$, וכמויות המשבצות שהן מכסות הוא לפחות $2a+2$, $2b+2$ ו-$2c+2$. לכן השטח הכולל הוא לפחות $2(a+b+c)+6$.

מצד שני, בלוח של משבצות שחורות שמסובב כמו קודם, כל קו אנכי יכול לחתוך לכל היותר 6 משבצות ששייכות לשרשראות (כי בכל מהלך אי-זוגי השרשרת מתקדמת ימינה). בקווים אנכיים קיצוניים אפשר אפילו לשפר: בקצוות יש רק משבצת אחת בכל עמודה, בעמודות ליד הקצוות יש רק 3, ובעמודה שלישית מימין ושלישית משמאל לכל היותר 5 (כי זה כל מה שיש שם)



לכן בסה"כ השרשרות יכולות לכסות לכל היותר $2\cdot(1+3+5+6\cdot 7)=2\cdot(9+42)$ משבצות. לכן $2(a+b+c)+6\le 2\cdot 51$ כלומר $a+b+c\le 51-3=48$.

מצד שני, אם אנחנו מדלגים על 12 משבצות מתוך 20^2 , צריך שיהיו 10^2-3 צורות, כלומר 97. אם רק 48 צורות מכוונות אופקי (לאחר שסובבנו ב-45°) אז לפחות 49 צורות מכוונות אנכית, כלומר הרוב. אבל יכולנו להוכיח גם את הטענה ההפוכה, וזה סתירה.