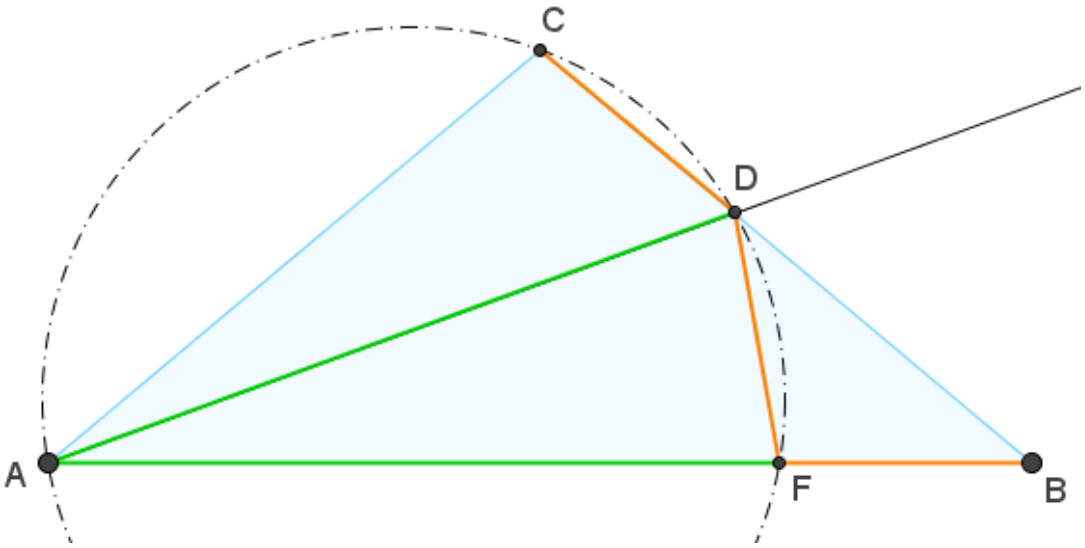
תרגיל 1

1. במשולש ABC נתון $\sphericalangle A = 40^\circ = \sphericalangle B$. הקטע AD הוא חוצה הזווית של משולש (D נמצאת על BC). מה יותר גדול $AD + DC$ או AB ?

תשובה. הם שווים.

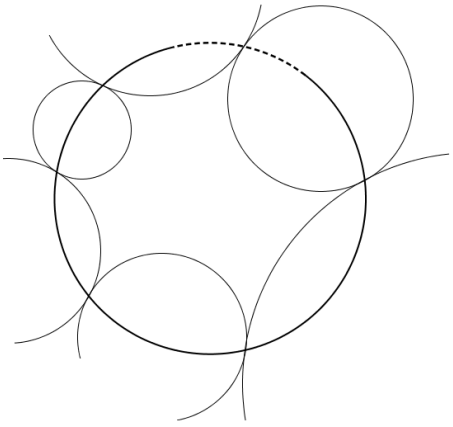
פתרון. נסמן על AB נקודה F כזאת ש-$AD = AF$. (קטעים ירוקים בציור שווים)



אז במשולש DAF הזווית A היא 20° ולכן הזוויות D ו-F הן 80°. במשולש BDF הזווית F היא 100° וזוויות B ו-D הן 40°. לכן הוא שווה שוקיים, $BF = FD$.

במרובע FACD הזווית C היא 100°, והזוויות F היא 80°. לכן הוא חסום. על הקשתות DF ו-CD נשענות זוויות שונות מ-A, לכן הקשתות שוות. לכן $CD = DF = FB$.

לכן $AD + DC = AF + FB = AB$.



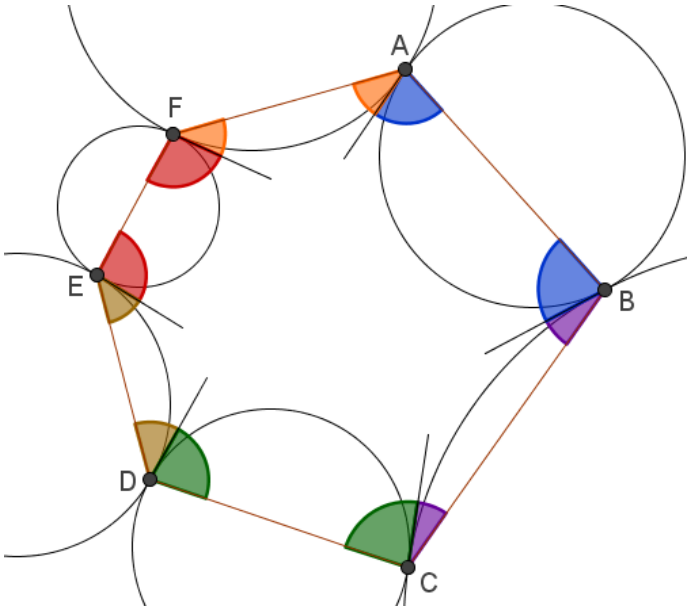
2. נתונים 6 עיגולים שלא מכילים זה את זה וכל עיגול משיק לשני עיגולים: הראשון משיק לשני, השני משיק לשלישי, השלישי לרביעי, . . . , ואחרון לראשון. מבין נקודות ההשקה 5 נמצאות על מעגל אחת. הוכיחו שגם נקודת ההשקה האחרונה נמצאת על אותו המעגל שעובר דרך כל נקודות ההשקה האחרות.

פתרון. ננסח שתי טענות.

טענה 1. במשושה ABCDEF שחסום במעגל, $\sphericalangle A + \sphericalangle C + \sphericalangle E = \sphericalangle B + \sphericalangle D + \sphericalangle F$.

טענה 2. אם משושה ABCDEF מקיים $\sphericalangle A+\sphericalangle C+\sphericalangle E=\sphericalangle B+\sphericalangle D+\sphericalangle F$ והמחומש ABCDE חסום במעגל, אז גם המשושה חסום במעגל.

אנחנו בעצם צריכים רק את טענה 2 בשביל לפתור את השאלה, אבל טענה 1 תעזור להוכיח את טענה 2.



קל מאוד לפתור את השאלה באמצעות טענה 2. אכן, אם נעביר משיק בכל אחד מנקודות ההשקה של שני מעגלים במחרוזת, כל זווית תחולק לשני חלקים. חלקים מסמוכים של זוויות בקודקודים סמוכים של המשושה שווים זה לזה, הרי הם נשענים על אותה הקשת באותו מעגל (זווית בין משיק למיתר). בציור זוויות שוות מסומנות באותו צבע. קל לראות, שקל אחת מהזוויות השוות מופיע פעם בזווית זוגית ופעם בזווית אי-זוגית של המשושה, לכן סכום הזוויות הזוגיות במשושה שנתון בשאלה שווה לסכום זוויות האי-זוגיות, ולכן לפי טענה 2 כל קודקודיו נמצאים על מעגל אחד.

נשאר להוכיח את הטענות.

הוכחת טענה 1. $\sphericalangle A=\frac{1}{2}\mathrm{BCDEF}=\pi-\frac{1}{2}\mathrm{BAF}$. האופן דומה $\sphericalangle C=\pi-\frac{1}{2}\mathrm{BCD}$, וכן $\sphericalangle E=\pi-\frac{1}{2}\mathrm{DEF}$. לכן

$$\sphericalangle A+\sphericalangle C+\sphericalangle E=3\pi-\tfrac{1}{2}\left(\mathrm{FAB}+\mathrm{BCD}+\mathrm{DEF}\right)=3\pi-\tfrac{1}{2}\cdot 2\pi=2\pi$$

באופן דומה מחשבים את $\sphericalangle B+\sphericalangle D+\sphericalangle F$ ומקבלים אותו דבר.

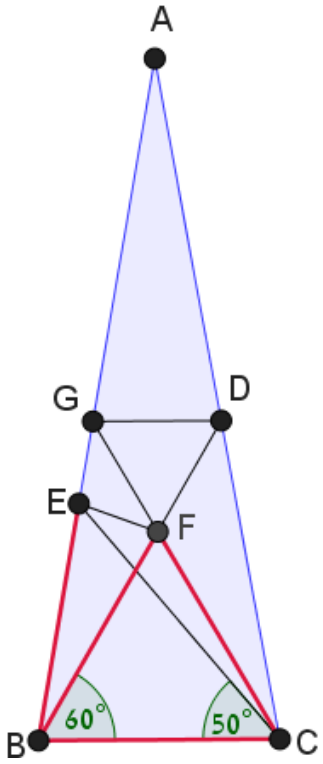
הוכחת טענה 2. נתון שיש מעגל ABCDE. אם נקודה F היא בתוך העיגול, או מחוץ לעיגול, נעביר ישר ℓ דרך F ואמצע AE. הישר יחתוך את הקשת AE בנקודה 'F.

אם נקודה F בתוך המשושה 'ABCDEF, אז בעזרת טענה 1 רואים כי

$$\begin{aligned}\sphericalangle \mathrm{FAB}+\sphericalangle C+\sphericalangle \mathrm{DEF} \;&>\; \sphericalangle \mathrm{F'AB}+\sphericalangle C+\sphericalangle \mathrm{DEF'} \;= \\ &= \sphericalangle B+\sphericalangle D+\sphericalangle \mathrm{F'} \;>\; \sphericalangle B+\sphericalangle D+\sphericalangle F\end{aligned}$$

בניגוד להנחה. אם נקודה F מחוץ למשושה 'ABCDEF שני אי-השוויונים הופכים כיוון, אבל גם זה נוגד את ההנחה.

3. משולש ABC הוא שווה שוקיים, $AB=AC$, $\sphericalangle A=20^\circ$. בוחרים נקודות D ו-E על צלעות AC ו-AB בהתאמה, כך ש-$\sphericalangle BCE=50^\circ$ ו-$\sphericalangle CBD=60^\circ$. מצאו את הזווית $\sphericalangle BDE$.



פתרון. מחשבון זוויות פשוט רואים כי משולש BEC שווה-שוקיים. ניקח נקודה F על BD, כך שהמשולש BCF משוכלל. אז $BE=BC=BF$, לכן גם משולש BEF שווה-שוקיים. זווית הראש שלו B היא 20°, לכן $\sphericalangle EFB=80^\circ$, לכן $\sphericalangle EFD=100^\circ$.

נמשיך את FC עד המפגש אם AB בנקודה G. קל לראות שהמשולש DFG משוכלל, וגם ש-D סימטרי ל-G ביחס לאנך האמצעי של BC. לכן DAG משולש שווה-שוקיים, ולכן קל לחשב כי $\sphericalangle AGD=80^\circ$, ולכן

$$\sphericalangle EGD=100^\circ=\sphericalangle EFD$$

לכן המרובע $GEFD$ סימטרי לעצמו ביחס לאנך האמצעי של GF, כלומר הוא דלתון. לכן

$$\sphericalangle BDE=\sphericalangle FDE=\tfrac{1}{2}\sphericalangle FDG=\tfrac{1}{2}\cdot 60^\circ=30^\circ.$$

4. נתון מעגל שמרכזו O וקוטרו BC. נקודה A נבחרה על המעגל כך ש-$\sphericalangle AOC>60^\circ$. אמצע הקשת AB (הקטנה מבין השניים) יסומן D. הישר דרך O שמקביל ל-AD פוגש את הישר AC בנקודה J. מיתר EF של המעגל הנתון הוא האנך האמצעי של OA. הוכיחו כי J זה מרכז המעגל החסום במשולש CEF.

פתרון. קיימים שני המשולשים שהקטע OA הוא צלע שלהם. הקודקוד הנוסף של כל אחד מהמשולשים האלה הוא נמצא גם על המעגל הנתון, וגם האנך האמצעי, לכן אלו הן נקודות E ו-F. לכן משולשים AOE, AOF משוכללים.

נקודות E ו-F סימטריות זו לזו ביחס לישר OA, ולכן $AE=AF$. לכן A גם הקשתות AE ו-AF שוות. לכן $\sphericalangle CAE$ ו-$\sphericalangle CAF$ נשענות על קשתות שוות, לכן הן זוויות שוות, וזה כבר מוכיח שהישר AC הוא חוצה-זווית של $\sphericalangle ECF$. לכן J נמצא על חוצה זווית של המשולש CEF מהקודקוד C.

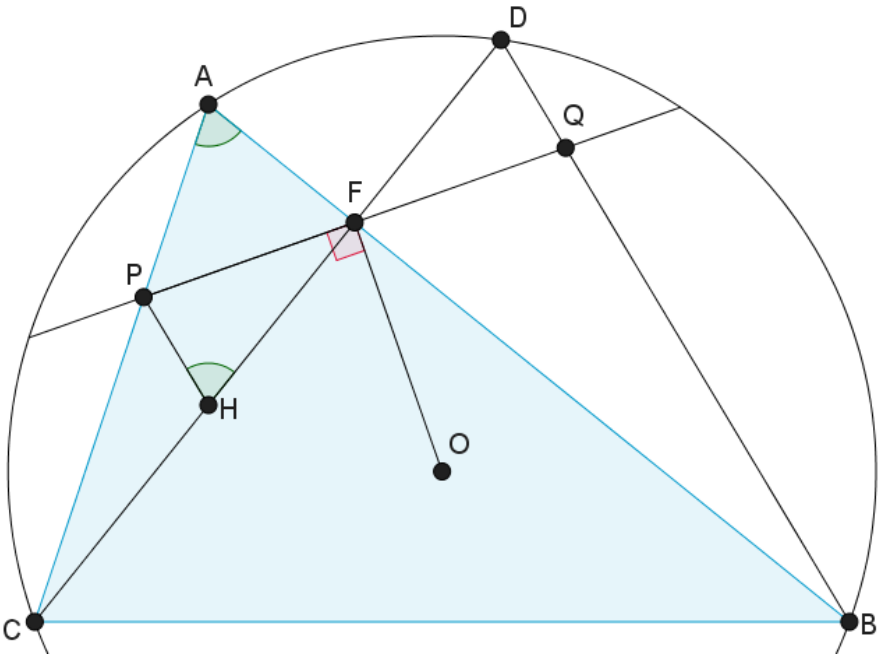
לפי משפט התלתן, בשביל להשלים את פתרון השאלה מספיק להראות ש-$AJ=AF$.

נשים לב כי DO הוא חוצה-זווית של $\sphericalangle AOB$ שזה זווית חיצונית של משולש AOC, שהוא משולש שווה-שוקיים ולכן DO מקביל ל-AC. מכאן ומהגדרה של J, רואים שבמרובע $JODA$ הצלעות הנגדיות שוות, ולכן $JODA$ מקבילית, ולכן

$$AF=OA=\text{רדיוס המעגל}=DO=JA$$

5. במשולש ABC כל הזוויות חדות, $AB < AC$. נקודת מפגש הגבהים יסומן H, מרכז המעגל החוסם יסומן O. הישרים AB ו-CH נפגשים בנקודה F (עקב הגובה). האנך לישר OF דרך נקודה F פוגש את AC בנקודה P. הוכיחו כי $\sphericalangle FHP = \sphericalangle BAC$.

פתרון. נמשיך את PF ואת CF למיתרים של המעגל החוסם. המשך של AF פוגש את המעגל החוסם שנית בנקודה D.



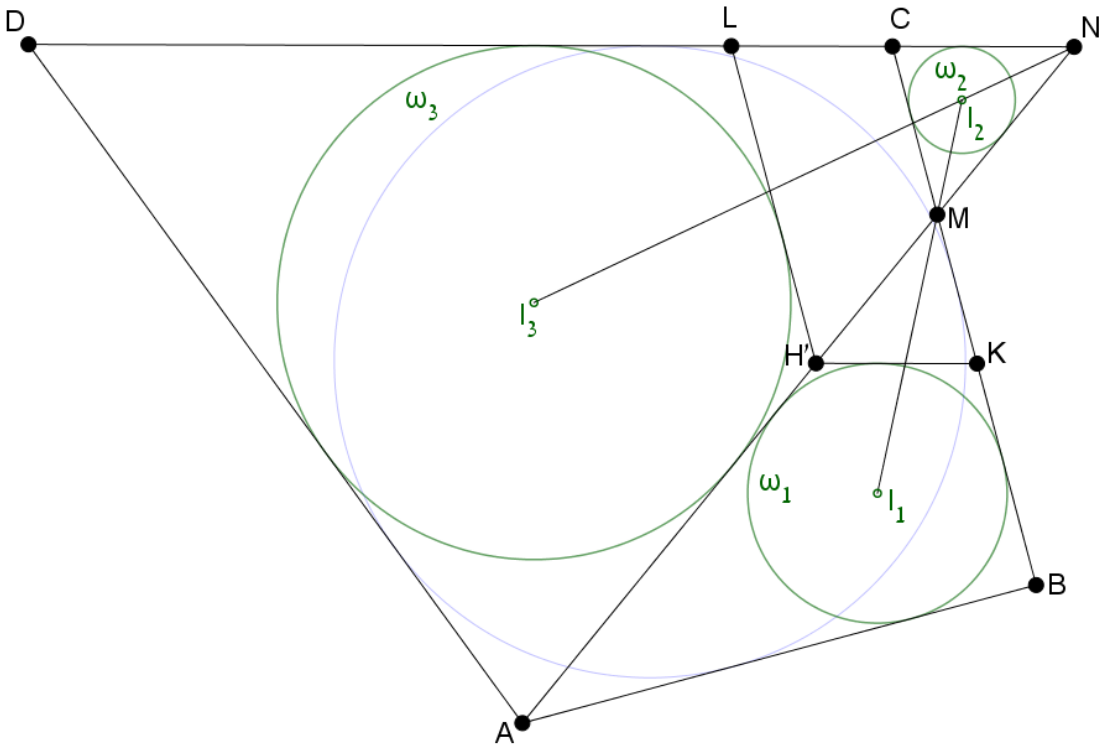
קל לבדוק שזווית AHB משלימה את הזווית ACB ל-180° (זה מתקבל מחשבון זוויות פשוט שמתבסס על הגדרה של H). לכן שיקוף של J ביחס ל-AB נמצא על המעגל החוסם. לכן D סימטרי ל-H ביחס למעגל החוסם, ו-$HF = FD$.

נקודת מפגש של PF ו-DB תסומן Q. נקודה היא F אמצע המיתר שמתקבל מהמשך של PF, כי הישר הזה מאונך ל-OF. לפי משפט הפרפר $PF = FQ$.

לכן משולשים FPH ו-QFD חופפים, ולכן $\sphericalangle FHP = \sphericalangle FDQ = \sphericalangle CDB = \sphericalangle BAC$.

6. ABCD מרובע חוסם מעגל. הישר ℓ שעובר דרך A חותך את הקטע BC בנקודה M ואת המשך DC בנקודה N. מרכזי המעגלים החסומים של BAM, CMN ו-DAN יסומנו I_1, I_2 ו-I_3 בהתאמה. הראו כי נקודת מפגש הגבהים של $I_1I_2I_3$ נמצאת על ℓ.

פתרון ראשון. נסמן את המעגלים החסומים של BAM, CMN ו-DAN ע"י ω_1, ω_2 ו-ω_3 בהתאמה. תהיה H נקודה מפגש האלכסונים של $I_1I_2I_3$. תהיה K נקודה על MB ו-H' נקודה על MA כך שהקטע KH' משיק למעגל ω_1 ומקביל ל-CD (המשיק בקרוב יותר ל-CD מבין שני המשיקים המקבילים). הישר דרך H' שמקבי ל-BC פוגש את CD בנקודה L. המרובעים ABKH' ו-ABCD חוסמים. מכאן מתקבל חשבון משיקים:



$$AD + LH' = AD + CK = AD + CB - KB = CD + AB - KB =$$
$$= CD + AH' - H'K = CD + AH' - CL = LD + AH'$$

לכן בעצם גם AH'LD מרובע חוסם, כלומר LH' משיק ל-ω_3.

צלעות של $\angle AH'K$ ו-$\angle AND$ מקבילות (שתיים באותו כיוון ושתיים בכיוון מנוגד), לכן חוצי זוויות של זווית אלו מאונכים. לכן I_1H' הוא גובה במשולש $I_1I_2I_3$.

צלעות של $\angle AH'L$ ו-$\angle AMB$ מקבילות (שתיים באותו כיוון ושתיים בכיוון מנוגד), לכן חוצי זוויות של זווית אלו מאונכים. לכן I_3H' הוא גובה במשולש $I_1I_2I_3$.

לכן H' הוא בעצם H, מפגש הגבהים של $I_1I_2I_3$. כך קיבלנו את התכונה שרצינו – H נמצאת על ℓ, וגם תכונות נוספות של H.

פתרון שני. פתרון זה מסתמך על שתי טענות:

טענה ראשונה. המשיק המשותף הנוסף של ω_1 ו-ω_3 (שאינו ℓ) עובר דרך נקודה C.

טענה שנייה. נתון משולש. השיקופים של ישר ℓ ביחס לצלעותיו נפגשים בנקודה אחת אם ורק אם הישר ℓ עובר דרך נקודת מפגש הגבהים.

נשאיר את שתי הטענות כחידות לקוראים (רמז: טענה ראשונה מתקבלת מחשבון משיקים, והשנייה מתקבלת מחשבון זוויות והזזות).

נשתמש בטענה שנייה למשולש $I_1I_2I_3$ וישר ℓ. צריך להראות, שהישר BC, CD והמשיק הפנימי המשותף שהוזכר בטענה ראשונה עוברים באותה נקודה. אבל לפי הטענה הראשונה, זאת נקודה C. זה משלים את ההוכחה.