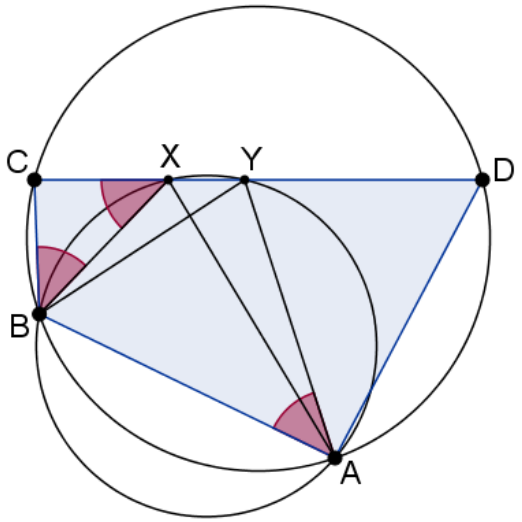
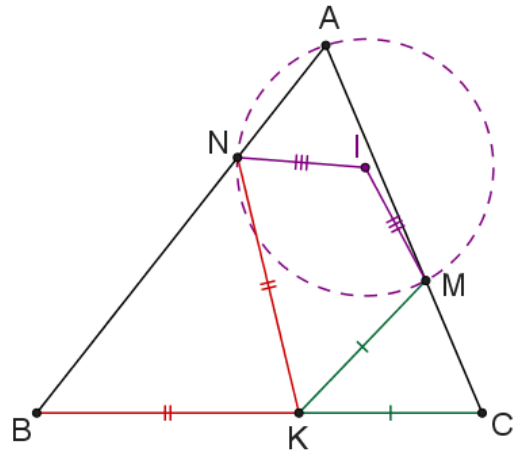
תרגיל 10

1. במרובע חסום ABCD מתקיים $AD+BC=CD$. הוכיחו שחוצי הזוויות A ו-B נפגשים על הצלע CD.



פתרון. קיימת נקודה X על CD עבורה $CX=BC$, $XD=DA$. המעגל ABX פוגש את CD שוב בנקודה Y. משולש BCX שווה שוקיים, לכן
$\sphericalangle CBX=\sphericalangle CXB=90^\circ-\frac{1}{2}\sphericalangle C$.
ABXY חסום, לכן $\sphericalangle BAY=\sphericalangle CXB$.
ABCD חסום, לכן $\sphericalangle A+\sphericalangle C=180^\circ$.
נסכם:
$\sphericalangle BAY=\sphericalangle CXB=90^\circ-\frac{1}{2}\sphericalangle C=\frac{1}{2}\sphericalangle A$
כלומר AY הוא חוצה הזווית של $\sphericalangle A$.
באופן דומה BY הוא חוצה הזווית של $\sphericalangle B$.

2. נקודות K, M, N נבחרו על צלעות המשולש AB, AC, BC בהתאמה, כך שמתקיים $BK=NK$ וגם $MK=CK$. הוכיחו כי מרכז המעגל החוסם של המשולש MAN נמצא על חוצה הזווית של $\sphericalangle MKN$.

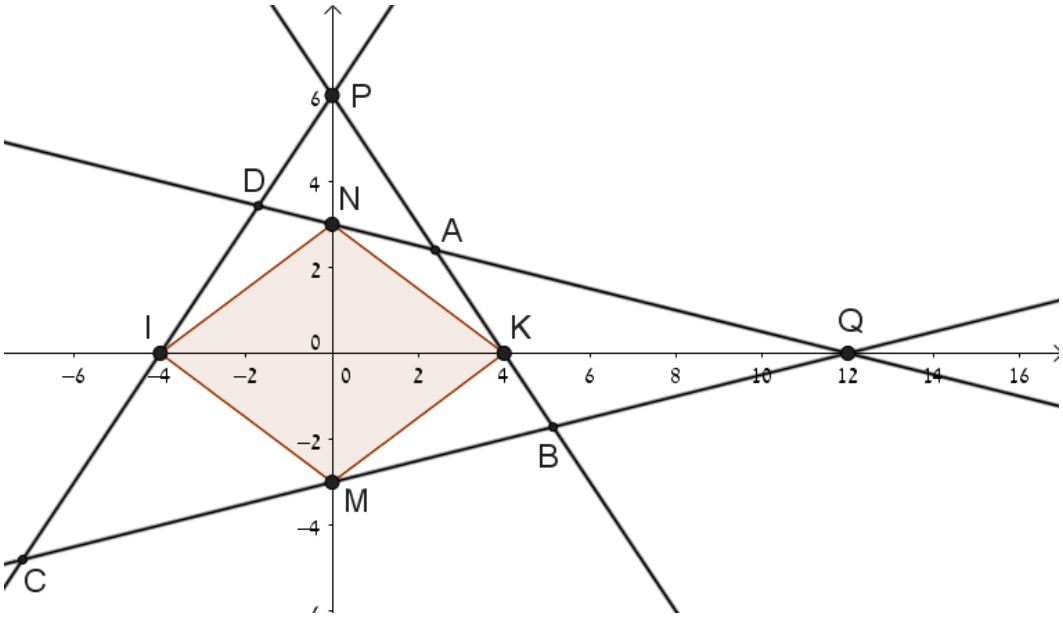


פתרון. נסמן ב-I את מרכז המעגל החוסם של MAN, ולשם קיצור נסמן את זוויות המשולש ABC על ידי α,β,γ.
קל לראות כי $\sphericalangle MKC=180^\circ-2\gamma$, וכמו כן $\sphericalangle NKB=180^\circ-2\gamma$ (הרי המשולשים NKB, MKC שווי שוקיים עם זוויות בסיס β ו-γ) ולכן $\sphericalangle NKM=180^\circ-2\alpha$, כי
$\sphericalangle BKN+\sphericalangle NKM+\sphericalangle MKC=180^\circ$
וגם $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$.
מצד שני $\sphericalangle MIN=2\alpha$ כי במעגל MAN הזווית המרכזית היא פי 2 מהזווית ההיקפית.
זה מוכיח שבמרובע MINK הזוויות הנגדיות I ו-K מסתכמות ל-180° כלומר המרובע חסום. במעגל MINK הקשתות IM, IN שוות כי המיתרים שווים, הרי הם שני רדיוסים במעגל MN. לכן הזוויות $\sphericalangle IKN$, $\sphericalangle IKM$ שוות כי הן נשענות על קשתות שוות. לכן IK חוצה את $\sphericalangle NKM$.

3. נתון מרובע קמור ABCD. הישרים AB ו-CD נפגשים בנקודה P, הישרים BC ו-AD נפגשים בנקודה Q. נבחרו נקודות K, N, I, M על הצלעות AB, AD, CD, BC בהתאמה, כך שהנקודות I, K ו-Q נמצאות על ישר אחד, הנקודות M, N ו-P נמצאות על ישר אחד, ו-MINK מקבילית.
הוכיחו כי אמצע AC, אמצע BD ואמצע MN נמצאים על ישר אחד.

פתרון. אנו נשתמש במספר העתקות אפיניות על מנת לפשט את הבעיה. נזכיר כי העתקה אפינית במישור היא העתקה שבקואורדינאטות מתוארת על ידי נוסחה מהסוג $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \cdot x + b \cdot y + c \\ d \cdot x + e \cdot y + f \end{pmatrix}$. קל לראות שהעתקות אפיניות מכבדות ישרים ואת המושג של אמצע הקטע, לכן הבעיה תשמר תחת העתקות אפיניות.

נוכל לסובב את התמונה כל שהישר MN יהיה ציר ה-y ומרכז המקבילית MINK יהיה ראשית הצירים, שמעכשיו נקרא לט O. אחר כך נוכל להשתמש בהעתקה אפינית $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y + kx \end{pmatrix}$ ולהפוך את IK לציר ה-x.



בתמונה שקיבלנו הישרים PK ו-PI סימטריים ביחס לציר ה-y, והישרים QN ו-QM סימטריים ביחס לציר ה-x. לכן המרחקים מ-O לישרים PI ו-PK שווים זה לזה, וגם המרחקים מ-O לישרים QM ו-QN שווים זה לזה.

כעת נחשוב על העתקה אפינית נוספת: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \cdot \ell \\ y / \ell \end{pmatrix}$, כאשר את k צריך עוד לבחור.

אם ℓ גדול מאוד (נגיד 1000), המרובע ABCD יהיה נמוך ושמן, והמרחק מ-O לישרים PI ו-PK קטן מאשר המרחק מ-O לישרים QM ו-QN. אבל אם ניקח ℓ קטן מאוד (נגיד $\frac{1}{1000}$) המצב יהיה הפוך. לכן קיים גם מצב ביניים, שבו במרחקים מ-O לכל הישרים האלה זהה, כלומר מרובע ABCD חוסם מעגל שמרכזו O.

נגדיר פונקציה במישור: $f(X) = S_{ABX} - S_{BCX} + S_{CDX} - S_{DAX}$, כאשר השטחים בנוסחה מכוונים, כלומר S_{ABX} חיובי כאשר הנקודות A, B, X מסודרות נגד כיוון השעון, ושלילי כאשר זה עם כיוון השעון. שטח מכוון מסוג S_{ABX} זו פונקציה ליניארית ב-x,

כלומר הרישום שלה בקואורדינאטות הוא $\varphi(x,y)=\alpha x+\beta y+\gamma$. סכום או הפרש של פונקציות ליניאריות זו גם פונקציה ליניארית. קל לבדוק (באמצעות הצבת קודקודים) שפונקציה $f(\mathrm{X})$ לא מתאפסת זהותית, אלה אם כן ABCD הוא מקבילית וזה לא המקרה שלנו. לכן קבוצת האפסים של f זה קו ישר.

אם O מרכז המעגל החסום במרובע ABCD, ורדיוס המעגל הוא r, אז

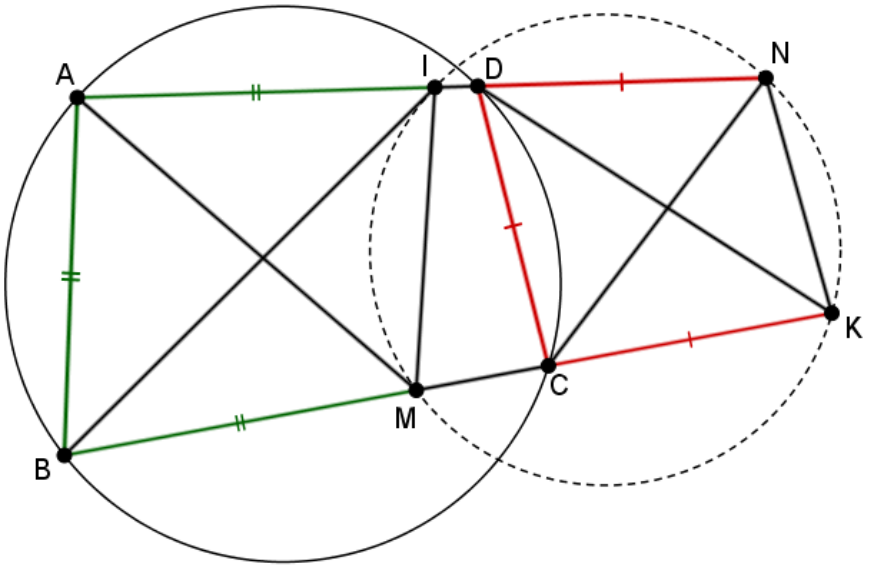
$$f(\mathrm{O})=S_{\mathrm{ABO}}-S_{\mathrm{BCO}}+S_{\mathrm{CDO}}-S_{\mathrm{DAO}}=\frac{r}{2}\cdot(\mathrm{AB}-\mathrm{BC}+\mathrm{CD}-\mathrm{DA})=0$$

אם S זה אמצע של AC, אז $S_{\mathrm{ABS}}=S_{\mathrm{BCS}}$, $S_{\mathrm{CDS}}=S_{\mathrm{DAS}}$ ולכן

$$f(\mathrm{S})=\cancel{S_{\mathrm{ABS}}}-\cancel{S_{\mathrm{BCS}}}+\cancel{S_{\mathrm{CDS}}}-\cancel{S_{\mathrm{DAS}}}=0$$

אם R זה אמצע של BD אז באופן דומה $f(R)=0$. לכן הנקודות O, R, S נמצאות על ישר אחד: קבוצת האפסים של f.

4. על הצלע AN של מרובע קמור BANK נבחרו נקודות I ו-D, כאשר I בין A ל-D; ועל הצלע BK נבחרו נקודות M ו-C, כאשר M בין B ל-C. נתון כי $\mathrm{IA}=\mathrm{AB}=\mathrm{BM}$ וגם $\mathrm{ND}=\mathrm{DC}=\mathrm{CK}$. הראו שאם ABCD חסום במעגל, אז גם MINK חסום במעגל.



פתרון. אם P היא נקודת מפגש של הישרים AD ו-BC, נבצע שיקוף ביחס לחוצה זווית של APB ואז הומותטיה מ-P, כך שבסוף A יעבור ל-C. אם הישרים AD ו-BC מקבילים, נבצע במקום שיקוף שיעביר את הישר AD ל-BC, ולאחר מכן הזזה כך שבסוף A יעבור ל-C. בכל מקרה יש העתקת דמיון שמחליפה בין הישר AD ל-BC, ומעבירה את A ל-C.

מכיוון שהזווית KCD ו-BAD שוות, אז גם Bתעבור ל-D. היות והמשולשים IAB ו-KCD שווי-שוקיים, אז I תעבור ל-K; באופן דומה M תעבור ל-N. לכן הזווית MIA שווה לזווית CKN, לכן הזוויות MIA ו-CKN שוות, לכן המרובע MINK חסום.

הערה. ניסוי קצר יותר לפתרון: העתקת למה-מה מעבירה כל קטע לקטע אנטי-מקביל.

5. מרובע ABCD חוסם במעגל שמרכזו I. על הישר DI נבחרה נקודה N כך שהזווית DAN ישרה. על הישר BI נבחרה נקודה M כך שהזווית BAM ישרה. הראו כי הישר MN מאונך לאלכסון AC.

פתרון. אורכי המשיקים מנקודות A, B, C, D למעגל החסום יסומנו a, b, c, d בהתאמה. נצייר מעגלים ω_1 ו-ω_2 עם מרכזים ב-M וב-N בהתאמה שעוברים דרך A.

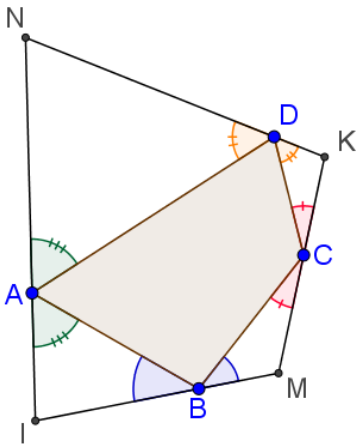
מכיוון ש-MD עובר דרך I, הוא חוצה זווית ADC. הישר AD משיק ל-ω_1 בנקודה A, מכיוון שמשיק מאונך לרדיוס, לכן גם הישר DC משיק לו מסימטריה, נגיד בנקודה P. אז

$$CP = DP - DC = DA - DC = (a+d) - (c+d) = a - c$$

באופן דומה, גם BC משיק ל-ω_2 בנקודה Q ומתקיים $CQ = a - c$.

לכן A וגם C על הציר הרדיקלי של ω_1 ו-ω_2. לכן AC מאונך ל-MN.

6. נתון מרובע קמור ABCD. חוצה זווית חיצוני של A פוגש חוצי זוויות חיצוניים של B ושל D בנקודות I ו-N בהתאמה. חוצה זווית חיצוני של C פוגש חוצי זוויות חיצוניים של B ושל D בנקודות M ו-K בהתאמה.



א. הראו שהמרובע MINK חסום.

ב. נתבונן ב-4 ישרים: האנך מ-K ל-CD, האנך מ-N ל-AD, האנך מ-I ל-AB, והאנך מ-M ל-BC. הראו שישרים אלה משיקים למעגל אחד.

ג. הראו שאם IK מאונך ל-MN, אז ABCD חסום.

ד. נסמן ב-X את נקודת חיתוך של AC ו-BD. במצב של סעיף ג', הוכיחו כי X ומרכזי המעגלים החוסמים של ABCD ושל MINK, נמצאים על ישר אחד.

פתרון. א. זווית I משלימה ל-180° את סכום של הזווית כחולה והזוית הירוקה, וזווית K משלימה ל-180° את סכום של הזווית הצהובה והזווית האדומה, לכן $\sphericalangle K + \sphericalangle I$ משלים ל-360° את סכום של כל 4 הזוויות הצבעוניות בציור. גם $\sphericalangle N + \sphericalangle M$ אותו דבר. לכן המרובע MINK חסום.

ב. נסמן ב-O את מרכז המעגל החוסם של MINK. אנחנו נוכיח ש-4 האנכים נמצאים במרחק שווה מ-O, כלומר מעגל מסוים שמרכזו ב-O שמשיק ל-4 האנכים.
ניקח שני אנכים סמוכים: האנך מ-K ל-CD והאנך מ-N ל-AD, שנפגשים בנקודה Y. הזוויות $\sphericalangle YKN$ ו-$\sphericalangle YNK$, כל אחת מהן משלימה את זווית צהובה ל-90°. לכן זוויות אלה שוות, ולכן $YK = YN$, וכמו כן $OK = ON$. לכן גם Y וגם O נמצאים על האנך האמצע של KN, ולכן O נמצא במרחק שווה מ-YK ו-YN.
אותו דבר אפשר להגיד על כל שני אנכים סמוכים.

ג. הנקודות K, N, I, M הם מרכזים של מעגלים חסומים מבחוץ שמשיקים לצלע של מרובע ABCD והמשכים של שני צלעות אחרות. לכן IK הוא ישר שביחס אליו הישר BC סימטרי לישר AD, במילים אחרות חוצה הזווית בין הישרים BC ו-AD. באופן דומה MN הוא ישר שביחס אליו הישר AB סימטרי לישר CD.

נשאר לבדוק, שאם ABCD חסום אז חוצה זווית של AB ו-CD מאונך לחוצה זווית של BC ו-AD. זו טענה מעניינת בפני עצמה, וניתן לה שני הסברים.

הסבר ראשון. נניח כי P נקודת מפגש של AB ו-CD, ונניח כי Q זו נקודת מפגש של BC ו-AD. נניח כי P ו-Q נמצאים בצד של D ולא בצד של B. נניח חוצי זווית של P ושל Q נפגשים ב-I.

הזווית $\sphericalangle PDQ$, $\sphericalangle PIQ$, $\sphericalangle PBQ$ יוצרים סדרה חשבונית (כי כל פעם מוסיפים מחצית של זווית P ועוד מחצית של זווית Q). מצד שני $\sphericalangle PBQ+\sphericalangle PDQ=180^\circ$, כי המרובע ABCD חסום. מש"ל.

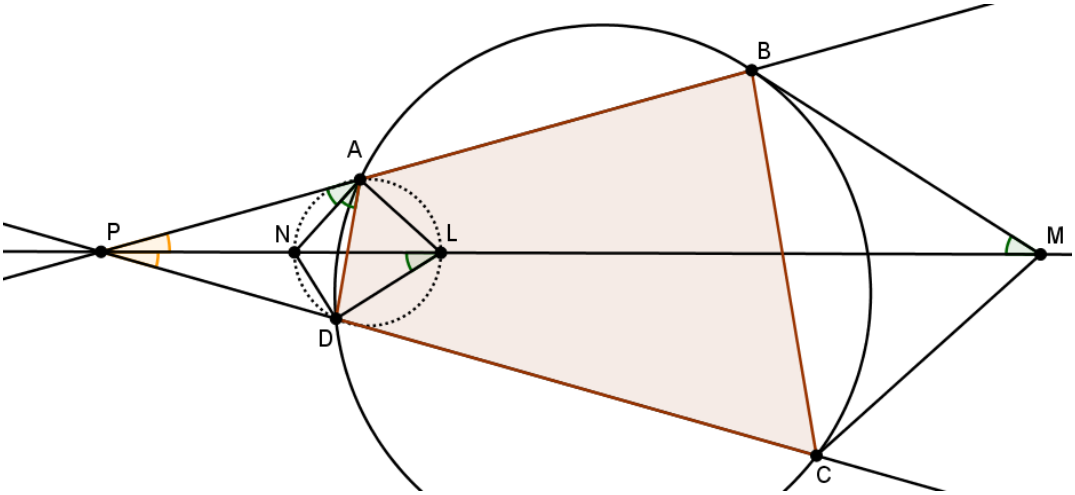
הסבר שני. נחשב בזוויות מכוונות כיוון של $\overrightarrow{AB}$ הוא α, של $\overrightarrow{BC}$ הוא β, של $\overrightarrow{CD}$ הוא γ ושל $\overrightarrow{DA}$ הוא δ. אם כיוון של חוצה זווית של AB ו-CD הוא x ושל חוצה זווית של BC ו-AD הוא y אז ניתן להניח כי $2x=\alpha+\gamma\left(\mathrm{mod}\,\pi\right)$ ובאופן דומה גם $2y=\beta+\delta\left(\mathrm{mod}\,\pi\right)$. נתון כי המרובע חסום, ואז $\left(\beta-\alpha\right)+\left(\delta-\gamma\right)=0\left(\mathrm{mod}\,\pi\right)$ ולכן גם $2x=2y\left(\mathrm{mod}\,\pi\right)$. כלומר חוצי זוויות באותו כיוון או מאונכים (תלוי איזה חוצה זווית לוקחים).

הערה. קיימת הכללה טבעית לטענה זו. כך למשל, אם לשתי אליפסות צירים מאונכים\מקבילים, ויש 4 נקודות חיתוך A, B, C ו-D אז נקודות אלה נמצאות על מעגל, וגם להפך: אם נקודות חיתוך של שתי אליפסות נמצאות על מעגל אז צירים מאונכים\מקבילים.

ד. נתבונן במרובע ABCD שהוא חסום במעגל שמרכזו Z. נגיד כי AB ו-CD נפגשים בנקודה P, BC ו-AD נפגשים ב-Q, AC ו-BD נפגשים ב-X. נגיד גם שהמשיקים למעגל החוסם בנקודות A ו-C נפגשים ב-U, ומשיקים למעגל החוסם בנקודות B ו-D נפגשים ב-V.

בגלל משפט פסקל במשושה המנוון AABCCD נקודות P, Q ו-U נמצאים על ישר אחד. בגלל משפט פסקל במשושה המנוון ABBCDD נקודות P, Q ו-U נמצאים על ישר אחד, שזה בעצם אותו ישר. ביחס למעגל, U דואלית לישר AC, V דואלית לישר BD, לכן הישר UVPQ דואלי ל-X. אז XZ מאונך ל-PQ.

נותר להראות שגם OZ מאונך ל-PQ, כאשר בעצם OZ זה קו המרכזים של שני המעגלים שיש לנו בציור. אחת הדרכים לעשות זאת זה להסביר שדרגה של P ביחס לכל אחד מהמעגלים היא זהה, ובאופן דומה גם עבור Q. עבור P מקבלים שצריך לבדוק את הזהות $PM\cdot PN=PA\cdot PB$, או במילים אחרות להראות כי MNAB חסום.



נניח לה"כ כי P נמצאת בצד של A ושל D. אז N הוא מרכז המעגל החסום של PAD, ו-M הוא מרכז המעגל החסום מבחוץ של BPC. שילוב של הומתטיה מ-P ושיקוף ביחס ל-PN מעביר את PAD ו-PCB, והוא גם מעביר מרכז המעגל החסום מבחוץ L של PAD למרכז המעגל החסום מבחוץ M של PBC. בנוסף\ נשים לב כי המרובע LAND חסום, הרי חוצה זווית חיצוני מאונך תמיד לפנימי, לכן זוויות A ו-D במרובע זה ישרות. לכן

$$\sphericalangle BMN = \sphericalangle BMP = \sphericalangle DLP = \sphericalangle DAN = \sphericalangle PAN$$

כלומר ABMN חסום, מש"ל.