תרגיל סינוסים

למה 1. במרובע $ABCD$ האלכסון AC יוצר זוויות ב-C: $\sphericalangle ACD = y$, $\sphericalangle ACB = x$.
אזי $\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{AB \cdot \sin \sphericalangle B}{AD \cdot \sin \sphericalangle D}$.

למה 2. נניח כי $0 < \alpha, \beta, \gamma, \delta$, $\alpha + \beta = \gamma + \delta < 180^\circ$, ובנוסף $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin \gamma}{\sin \delta}$.
אזי $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$.

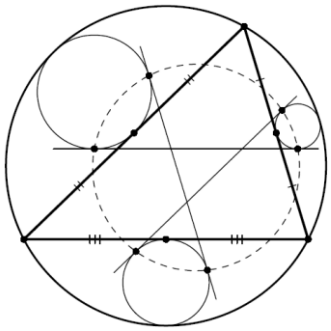
1. במקבילית $ABCD$ נבחרה נקודה X המקיימת $\sphericalangle XAB = \sphericalangle XCB$. הוכיחו כי $\sphericalangle XBC = \sphericalangle XDC$.

2. משפט פסקל: נתונות 6 נקודות על מעגל $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$. נגדיר $C_1 = A_2B_3 \cap A_3B_2$. באופן סימטרי מגדירים את C_2, C_3. הוכיחו כי C_1, C_2, C_3 נמצאות על ישר אחד.

3. הנקודות P ו-Q נמצאות על הצלע BC של משולש חד-זוויות ABC, כך ש-$\sphericalangle PAB = \sphericalangle BCA$ וכן $\sphericalangle CAQ = \sphericalangle ABC$. הנקודות M ו-N נמצאות על הישרים AP ו-AQ בהתאמה, כך ש-P היא אמצע הקטע AM ו-Q היא אמצע הקטע AN. הוכיחו כי נקודת החיתוך של הישרים BM ו-CN נמצאת על המעגל החוסם של המשולש ABC.

4. נתון משולש ABC. על צלעותיו AB ו-AC בוחרים נקודות E ו-F בהתאמה כך ש-$BE = EF = FC$. המשיק ב-A למעגל החוסם של ABC פוגש את הישר EF בנקודה X. הנקודה I היא מרכז המעגל החסום במשולש AFE. הראו כי $IX = AX$.

5. אמצעי הצלעות של משולש ABC הן D, E, F (מול A, B, C בהתאמה). המעגל ω_1 משיק לצלע BC בנקודה D, נמצא מחוץ למשולש ABC, ומשיק גם למעגל החוסם של ABC. באופן סימטרי מגדירים את המעגלים ω_2, ω_3. הישר ℓ_1 משיק למעגלים ω_2 ו-ω_3 בנקודות X_2 ו-X_3, כך שהמעגלים ω_2 ו-ω_3 נמצאים באותו צד של ℓ_1, אבל ω_1 נמצא בצד האחר של ℓ_1. באופן סימטרי מגדירים ישר ℓ_2 שמשיק ל-ω_1 ו-ω_3 בנקודות Y_1 ו-Y_2, וישר ℓ_3 שמשיק ל-ω_1 ו-ω_2 בנקודות Z_1 ו-Z_2.



א. הוכיחו כי הישרים ℓ_1, ℓ_2 ו-ℓ_3 מקבילים לצלעות המשולש ABC.

ב. הראו כי הנקודות $X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2$ נמצאות על מעגל אחד.

6. במשולש חד זוויות ABC נקודה M היא אמצע AC, ו-AD הוא גובה. נקודה נוספת E מקיימת $\sphericalangle AEB = 90^\circ = \sphericalangle DEM$. הוכיחו כי $\sphericalangle EMB = 2\sphericalangle MBC$.

7. נתון משולש ABC. הנקודה N מקיימת $\sphericalangle ACN = 90^\circ = \sphericalangle ABN$. בוחרים נקודות E, F על הקטעים AB, AC בהתאמה כך ש-$\sphericalangle ENB = \sphericalangle FNC$. הנקודה G היא החיתוך של הישרים EF ו-BC. תהא K אמצע EF. תהא X נקודת החיתוך של המעגלים החוסמים של המשולשים AEF ו-ABC. הוכיחו כי $XK \perp XG$.

בהצלחה!