חצי-אינווריאנטים

1. על הלוח צוירו נקודות כחולות ונקודות אדומות, לאחר מכאן חלק מהנקודות חוברו על ידי קטעים. נקרא לנקודה משונה אם יותר ממחצית הנקודות שמחוברות אליה הן בצבע שונה ממנה. בכל דקה בוחרים נקודה משונה והופכים את צבעה. האם התהליך יסתיים?

2. על פאות של קוביה קסומה רשומים מספרים שלא כולם זהים. בכל דקה על כל פאה המספר מוחלף במספר ששווה לממוצע החשבוני של המספרים על הפאות השכנות. האם יתכן כי לאחר זמן מה על כל פאה יהיה רשום המספר שהיה רשום עליה בהתחלה?

3. במישור נתונות N נקודות, חלקן מחוברות על ידי קטעים. כל נקודה מחוברת לכל היותר עם 11 נקודות נוספות. הוכח כי ניתן לצבוע את הנקודות ב 4 צבעים כך שכמות הקטעים המחברים בין נקודות בצבעים זהים לא עולה על N.

4. במישור נתונות N נקודות אדומות ו-N נקודות כחולות במצב כללי. הוכח שאפשר לזווג אותן באמצעות N קטעים שלא נחתכים זה עם זה.

5. על קו ישר יש שורה של בתים, אינסופית לשני הכיוונים. בבתים אלה גרים 100 מוזיקאים (יכולים להיות מספר מוזיקאים באותו בית). בכל יום עלול לקרות אחד משני דברים:

א. שני מוזיקאים שגרים בבתים $N, N+1$ מחליטים שהם מפריעים זה לזה, עוברים לגור לבתים $N-1, N+2$.

ב. שני מוזיקאים שגרים בבית מספר N מחליטים שהם מפריעים זה לזה, ועוברים לגור לבתים $N-1, N+1$.

הוכח שכעבור זמן מה מעברי דירה יפסקו.

6. תלמידי ירדן עומדים במעגל. כל תלמיד קיבל כמות כלשהי של סוכריות. כל דקה כל אחד מהתלמידים מקבל מלב סוכריה נוספת אם יש לו כמות אי זוגית של סוכריות. מיד לאחר מכן כל תלמיד נותן חצי מהסוכריות שלו לחברו מימין. הוכח כי לאחר זמן מה נגיע לקומוניזם (לכולם תהיה כמות שווה של סוכריות).

7. סביב שולחן עגול יושבים 60 ילדים. לאחד מהם נתנו N סוכריות. בכל דקה כל ילד המחזיק לפחות 3 סוכריות נותן אחת לחברו מימין ואחת לחברו משמאל. מצא את הערך המינימלי של N כך שיהיה רגע בו לכל ילד תהיה לפחות סוכריה אחת.

8. על השולחן מונחים 2016 קלפים עם הגב כלפי מעלה. בכל שלב ניתן לבחור 50 קלפים רצופים כך שהשמאלי ביותר מביניהם עם הגב כלפי מעלה, ולהפוך אותם. האם התהליך בהכרח יסתיים?

9. על מדף בספריה, בסדר אקראי, מונחים N פרקים של אינציקלופדיה. בכל יום הספרנית לוקחת פרק אחד ומניחה אותו במקום המיועד לו (פרק K במקום K). הוכח כי לאחר זמן מה כל הפרקים יהיו במקומם.

10. במעגל רשומים N מספרים שסכומם חיובי. אפשר לעשות פעולות מהסוג הבא: לקחת מספר שלילי, להוסיף אותו לשני מספרים הסמוכים ולאחר מכן לשנות את סימנו לחיובי. השחקן בוחר את המספר השלילי איך שבא לו, ועוצר רק כאשר לא נשארו עוד מספרים שליליים במעגל. הוכח שהתהליך יסתיים אחרי מספר סופי של צעדים:

א. במקרה שהמספרים במעגל שלמים ו-$N = 5$,

ב. במקרה שהמספרים במעגל שלמים,

ג. בכל מקרה.

ד. הוכח שכמות הצעדים לא תלויה בהחלטות של השחקן. ***בהצלחה!***